Đurđica Salamon Padjen • Boško Šego • Tihana Škrinjarić

# MATEMATIKA 1

udžbenik sa zbirkom zadataka
za ekonomiste i komercijaliste
I. razred

prvo izdanje
Zagreb, 2014.

alka script

# SADRŽAJ

# OMJERI I RAZMJERI

Omjeri

Upravna i obrnuta razmjernost

Razmjeri i njihova svojstva

Postotni račun

# 3.

# 3. OMJERI I RAZMJERI

## 3.1. Omjeri

Ako Marko ima 16 kuna, a njegov brat Ivan 8, kažemo da Marko ima 2 puta više novca od Ivana. Dakle, uspoređujemo dvije veličine: količinu novca koju ima Marko uspoređujemo s količinom novca što je ima Ivan. Pritom smo iznos koji ima Marko podijelili iznosom kojim raspolaže Ivan, to jest odnos navedenih dviju količina novca slijedi kao rezultat dijeljenja 16 : 8, što možemo pisati i u obliku razlomka $\frac{16}{8}$. Uočimo da smo uspoređivali dvije istoimene veličine (novac).

**Omjer** je količnik (kvocijent) dvaju brojeva $a$ i $b$ različitih od nule, pišemo $a : b$. Prvi je član omjera $a$, a drugi je $b$.

Upravo iz činjenice da omjer predstavlja količnik dviju (istoimenih) veličina, slijede sljedeća važna pravila:

1. Vrijednost se omjera ne mijenja ako se oba člana omjera pomnože ili podijele istim brojem različitim od nule. Ako članove omjera množimo istim brojem $k \neq 0$, kažemo da smo omjer proširili (faktorom $k$), a ako smo ih podijelili istim brojem $k \neq 0$, kažemo da smo omjer skratili (faktorom $k$).
2. Dva su omjera jednaka kad su im količnici jednaki.

Analizirajmo prvo svojstvo. Proširimo li omjer $a : b$ faktorom $k$ ($k \neq 0$), dobili smo omjer $(ak) : (bk)$. No, omjer možemo pisati kao razlomak pa je

$$(ka):(kb)=\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}=a:b,$$

što znači da se množenjem obaju članova istim brojem $k$ ($k \neq 0$) vrijednost omjera nije promijenila. Analogno, skratimo li omjer $a : b$ faktorom $k$ ($k \neq 0$), slijedi

$$\frac{a}{k}:\frac{b}{k}=\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}=\frac{a}{b}=a:b,$$

to jest dijeljenjem svakog člana omjera istim brojem $k$ ($k \neq 0$), vrijednost omjera nije se promijenila.

Navedena pravila omogućuju da, ako su članovi omjera racionalni brojevi, različiti od nule, polazni omjer zamijenimo omjerom čiji su članovi cijeli brojevi.

Primjer 1.

Pojednostavimo sljedeće omjere:

a) 25 : 55; b) 5,4 : 7,2; c) $\frac{4}{5}:\frac{16}{25}$; d) $\frac{2}{3}:4$.

Rješenje

a) 25 : 55 = (5 · 5) : (5 · 11) = 5 : 11 jer smo članove omjera mogli skratiti za faktor 5. Uočimo da smo do navedenog rezultata mogli doći i koristeći se pravilima koja vrijede za razlomke:

$$25:55=\frac{25}{55}=\frac{5\cdot 5}{5\cdot 11}=\frac{5}{11}=5:11.$$

b) 5,4 : 7,2 = 54 : 72 (omjer smo proširili za faktor 10) = 3 : 4 (omjer smo skratili za faktor 18) ili, koristeći se pravilima koja vrijede za razlomke,

$$5,4:7,2=\frac{54}{10}:\frac{72}{10}=\frac{\frac{54}{10}}{\frac{72}{10}}=\frac{54}{72}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}=3:4.$$

c) $\frac{4}{5}:\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}\right):\left(\frac{16}{25}\cdot\frac{25}{4}\right)=5:4,$

svaki član omjera proširili smo faktorom $\frac{25}{4}$ ili

$$\frac{4}{5}:\frac{16}{25}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{16}{25}}=\frac{4\cdot 25}{16\cdot 5}=\frac{5}{4}=5:4.$$

d) $\frac{2}{3}:4=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right):\left(4\cdot\frac{3}{2}\right)=1:6$ ili $\frac{2}{3}:4=\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{2}{3\cdot 4}=\frac{1}{6}=1:6.$

Naravno, navedenim se pravilima možemo koristiti i ako članovi omjera nisu racionalni brojevi, nego ma koji realni brojevi različiti od 0 ili opći brojevi ili algebarski izrazi.

Primjer 2.

Pojednostavnimo sljedeće omjere:

a) $8a : 12a$, $a \neq 0$; b) $(3x^2 - 6x) : (9x^3 - 36x)$ $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Rješenje

a) $8a : 12a = (2 \cdot 4a) : (3 \cdot 4a) = 2 : 3$,

b) $(3x^2 - 6x) : (9x^3 - 36x) = [3x(x - 2)] : [9x(x^2 - 4)] =$

$= [3x(x - 2)] : [9x(x - 2)(x + 2)] = 1 : 3(x + 2).$

Uočimo da smo omjer kratili izrazom $3x(x-2)$ koji je zajednički faktor članova polaznog omjera. Budući da se $3x(x-2)$ poništava ako je $x=0$ ili $x=2$, to smo morali pretpostaviti da je $x \neq 0$ i $x \neq 2$. Nadalje, nećemo posebno isticati uz koje uvjete može se kratiti u razmatranom primjeru.

Ako je poznat drugi član omjera $b$ i vrijednost $k$ omjera $a:b$, možemo izračunati prvi član. Naime, iz $a:b=k$ slijedi $a=b\cdot k$.

### Primjer 3.

Izračunajmo prvi član omjera ako je:

a) $x:5=10$; b) $x:\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$; c) $x:\frac{1}{a-1}=a^2-1$; d) $x:\frac{3}{2a+1}=4a^2-1$.

### Rješenje

a) $x:5=10$, to jest $\frac{x}{5}=10$ pa je $x=10\cdot 5=50$.

b) $x:\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$, to jest $x=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.

c) $x:\frac{1}{a-1}=a^2-1$, to jest $x=(a^2-1)\cdot\frac{1}{a-1}=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=a+1$.

d) $x:\frac{3}{2a+1}=4a^2-1$, to jest $x=(4a^2-1)\frac{3}{2a+1}=\frac{3(2a-1)(2a+1)}{2a+1}=3(2a-1)$.

Ako je poznat prvi član omjera $a$ i vrijednost $k$ omjera $a:b$, to jest ako je $a:b=k$, možemo izračunati prvi član. Naime, iz $a:b=k$ slijedi $b=\frac{a}{k}$.

### Primjer 4.

Izračunajmo drugi član omjera ako je:

a) $4:x=0{,}25$; b) $\frac{2}{3}:x=\frac{5}{7}$; c) $2{,}3:x=1{,}15$; d) $(a^3-1):x=a^2-1$.

### Rješenje

a) $4:x=0{,}25 \Rightarrow \frac{4}{x}=0{,}25 \Rightarrow x=\frac{4}{0{,}25}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$.

b) $\frac{2}{3}:x=\frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{x}=\frac{5}{7} \Rightarrow x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$.

c) $2{,}3:x=1{,}15 \Rightarrow \frac{2{,}3}{x}=1{,}15 \Rightarrow x=\frac{2{,}3}{1{,}15}=2$.

d) $(a^3-1):x=a^2-1 \Rightarrow \frac{a^3-1}{x}=a^2-1 \Rightarrow x=\frac{a^3-1}{a^2-1}=$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+a+1}{a+1}.$$

**Produženi omjer** skraćeni je zapis više jednostavnih omjera kod kojih je drugi član svakog omjera jednak prvom članu sljedećeg omjera.

Dakle, ako je $a : b$ i $b$ : c, to možemo pisati koristeći se produženim omjerom na sljedeći način $a : b$ : c. Primjerice, ako je zadano 2 : 3 i 3 : 4, to možemo pisati u obliku produženog omjera 2 : 3 : 4.

Primjer 5.

Formirajmo produženi omjer iz sljedećih jednostavnih omjera:

a) 3 : 5 i 10 : 12; b) 2 : 3 i 4 : 5 i 6 : 7;

c) $4a : (a^2 - 1)$ i $(a + 1) : (a^2 + 1)$ i $(a^2 + 1) : (a - 1)$.

Rješenje

Zadane omjere moramo najprije transformirati tako da zadovolje uvjet da je drugi član svakog omjera jednak prvom članu sljedećeg omjera.

a) Proširivanjem prvog omjera faktorom 2, dobivamo:

$$3 : 5 = (2 \cdot 3) : (2 \cdot 5) = 6 : 10$$

pa je sada drugi član ovog omjera jednak prvom članu drugog omjera 10 : 12. Dakle, traženi je produženi omjer: 6 : 10 : 12. Uočimo da faktor kojim smo prvi omjer proširili predstavlja količnik najmanjeg zajedničkog višekratnika drugog člana prvog omjera i prvog člana drugog omjera i drugog člana prvog omjera, to jest

$$\frac{v(5,10)}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

Budući da je količnik najmanjeg zajedničkog višekratnika drugog člana prvog omjera i prvog člana drugog omjera jednak 1, to jest

$$\frac{v(5,10)}{10}=\frac{10}{10}=1,$$

to drugi omjer nije trebalo transformirati.

b) Najprije ćemo omjere 2 : 3 i 4 : 5 pisati u obliku produženog omjera. U tu svrhu proširit ćemo prvi omjer umnoškom drugog člana prvog omjera i količnika najmanjeg zajedničkog višekratnika i najveće zajedničke mjere drugog člana prvog omjera i prvog člana drugog omjera, to jest faktorom:

$$\frac{v(3,4)}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

a drugi faktorom

$$\frac{v(3,4)}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Dakle, prvi i drugi omjer možemo pisati i ovako:

$$2 : 3 = (4 \cdot 2) : (4 \cdot 3) = 8 : 12 \quad \text{i} \quad 4 : 5 = (3 \cdot 4) : (3 \cdot 5) = 12 : 15$$

pa je sada drugi član prvog omjera jednak prvom članu drugog omjera.

Dakle, omjere $2 : 3$ i $4 : 5$ možemo pisati u obliku produženog omjera na sljedeći način:

$$8 : 12 : 15.$$

Da bismo od omjera $8 : 12 : 15$ i $6 : 7$ mogli formirati jedan produženi omjer, prvi omjer moramo proširiti faktorom

$$\frac{v(15,6)}{15} = 2,$$

a drugi omjer faktorom

$$\frac{v(15,6)}{6} = 5.$$

Tako dolazimo do omjera

$$16 : 24 : 30 \quad \text{i} \quad 30 : 35,$$

od kojih se sada lako dobije jedan produženi omjer:

$$16 : 24 : 30 : 35.$$

c) Najprije ćemo omjere $4a : (a^2 - 1)$ i $(a + 1) : (a^2 + 1)$ pisati u obliku produženog omjera. U tu svrhu proširit ćemo prvi omjer faktorom

$$\frac{v(a^2-1, a+1)}{a^2-1} = \frac{a^2-1}{a^2-1} = 1,$$

(dakle, ne trebamo ga transformirati jer je taj faktor 1!), a drugi faktorom

$$\frac{v(a^2-1, a+1)}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} = a-1.$$

Prema tome, drugi omjer možemo pisati i ovako:

$$(a + 1) : (a^2 + 1) = [(a + 1)(a - 1)] : [(a^2 + 1)(a - 1)] = (a^2 - 1) : [(a^2 + 1)(a - 1)]$$

pa je sada drugi član prvog omjera jednak prvom članu drugog omjera, što znači da je traženi produženi omjer:

$$4a : (a^2 - 1) : [(a^2 + 1)(a - 1)].$$

Preostaje da od omjera

$$4a : (a^2 - 1) : [\,(a^2 + 1)\,(a - 1)] \quad \text{i} \quad (a^2 + 1) : (a - 1)$$

formiramo jedan produženi omjer. Očito je da drugi omjer moramo proširiti faktorom

$$\frac{v\left((a^2+1)(a-1), a^2+1\right)}{a^2+1} = a - 1.$$

Nakon toga jednostavno je od omjera

$$4a : (a^2 - 1) : [(a^2 + 1)\,(a - 1)] \quad \text{i} \quad [(a^2 + 1)\,(a - 1)] : (a - 1)^2$$

formirati sljedeći produženi omjer:

$$4a : (a^2 - 1) : [(a^2 + 1)\,(a - 1)] : (a - 1)^2.$$

## 3.2. Upravna i obrnuta razmjernost

Ako dvije veličine $x$ i $y$ ovise jedna o drugoj tako da povećanje (ili smanjenje) jedne od njih $k$ puta povlači povećanje (odnosno smanjenje) druge veličine $k$ puta, kažemo da su veličine $x$ i $y$ **upravno razmjerne** (ili **direktno proporcionalne**).

Pišemo

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ili} \quad y = kx.$$

Dakle, **količnik upravno razmjernih veličina uvijek je konstantan**. Konstantni količnik zove se **faktor razmjernosti** (**proporcionalnosti**).

Primjer 6.

Neka osoba u trgovini kupi 2 kg jabuka i za to plati 14 kn. Idući dan kupi 3 kg jabuka i za to plati 21 kn. Za nekoliko dana kupi 5 kg jabuka i plati 35 kn. Što možemo na temelju navedenih podataka zaključiti?

Rješenje

Cijena 1 kg jabuka pri prvoj kupnji iznosila je

$$\frac{14}{2}\ \text{kn} = 7\ \text{kn}.$$

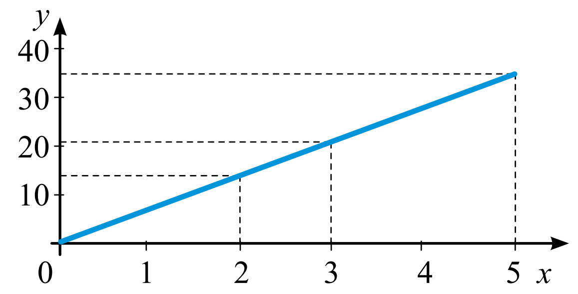
Pri idućoj kupnji cijena 1 kg jabuka iznosila je

$$\frac{21}{3}\ \text{kn} = 7\ \text{kn},$$

a pri posljednje navedenoj

$$\frac{35}{5}\ \text{kn} = 7\ \text{kn}.$$

Dakle, cijena 1 kg jabuka u navedenoj trgovini nije se mijenjala u razmatranom vremenskom razdoblju. U ovom su primjeru količina jabuka $x$ (izražena u kg) i novčani iznos $y$ (izražen u kunama), potreban za nabavku te količine, upravno razmjerne veličine. Uočimo da smo vrijednosti tih dviju veličina $x$ i $y$ mogli predočiti u koordinatnom sustavu $xOy$. Naime, vezu između njih opisuje funkcija $y = 7x$ jer je riječ o upravno razmjernim veličinama s faktorom razmjernosti $k = 7$. To znači da točke (2, 14), (3, 21) i (5, 35) pripadaju jednom pravcu koji sadrži ishodište koordinatnog sustava (slika 1). Riječ je o 3 kolinearne točke.



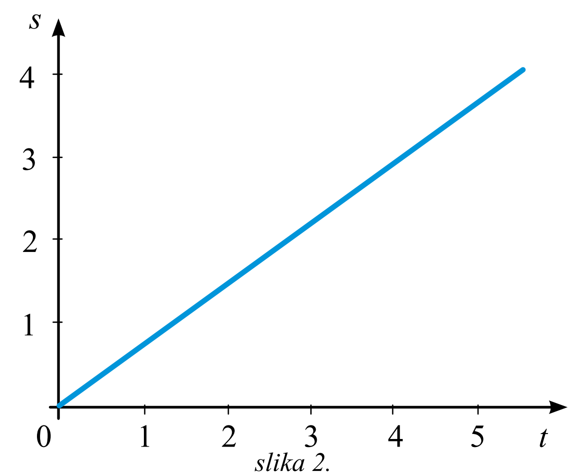
*slika 1.*

### Primjer 7.

Pokažimo da su, u slučaju jednolikog gibanja, put $s$ i vrijeme $t$ međusobno razmjerne veličine.

### Rješenje

Budući da je, u slučaju jednolikog gibanja, brzina $v = \frac{s}{t}$ konstantna, to znači da je upravo $v$ faktor proporcionalnosti. Vidimo da je $s = v \cdot t$. Promatramo li prijeđeni put s kao funkciju vremena $t$, $t \geq 0$, onda je graf te funkcije polupravac s početkom u ishodištu koordinatnog sustava, koeficijenta smjera $v$ (slika 2).



*slika 2.*

### Primjer 8.

Neka osoba želi za 1000 kn kupiti u mjenjačnici eure. Koliko će eura kupiti ako mjenjačnjica za 1 euro traži:

a) 7,4 kn; b) 7,5 kn?

### Rješenje

Očito, traženu količinu eura izračunat ćemo dijeleći 1000 kn (kunski iznos koji želimo pretvoriti u eure) tečajem (koji nam u ovom primjeru predstavlja količinu kuna koju valja izdvojiti za 1 €). To znači da je u razmatranim slučajevima

a) $\frac{1000}{7,4} \approx 135,14$ €; b) $\frac{1000}{7,5} \approx 133,33$ €.

Uočimo: ako se tečaj smanji, povećava se količina eura koju se za točno određenu (fiksnu) količinu kuna može u mjenjačnici kupiti i, obratno, smanji li se tečaj, povećava se količina eura koju možemo za navedeni fiksni iznos kuna kupiti. Dakle, označimo li s $x$ tečaj, s $y$ traženu iznos u eurima, a s $k$ (fiksni) iznos kuna koji želimo promijeniti u eure, to možemo pisati na sljedeći način:

$$\frac{k}{x} = y \quad \text{ili} \quad x \cdot y = \mathrm{k}.$$

Ako dvije veličine $x$ i $y$ ovise jedna o drugoj na način da, ako se jedna od njih poveća (ili smanji) $k$ puta, druga se veličina za toliko puta smanji (odnosno poveća), kažemo da su veličine $x$ i $y$ **obrnuto razmjerne** (ili **indirektno proporcionalne**).

Pišemo

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{ili} \quad x \cdot y = k.$$

Dakle, umnožak obrnuto razmjernih veličina je konstantan.

### Primjer 9.

Ako 8 radnika završi određeni posao za 6 sati, za koliko će sati taj posao obaviti 12 radnika uz pretpostavku da je učinkovitost svakog radnika podjednaka?

### Rješenje

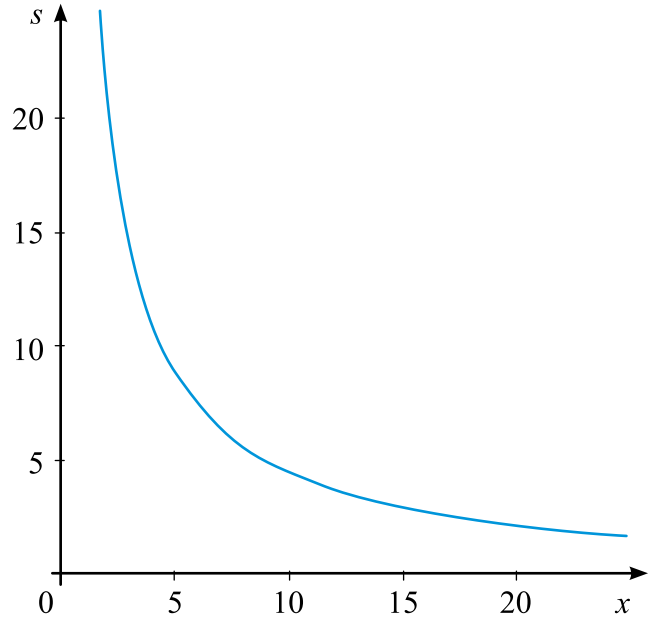
Što znači da je učinkovitost svakog radnika podjednaka? To znači da za 1 sat svaki radnik obavi jednaku količinu određenog posla. U ovom primjeru 8 radnika završi posao za 6 sati pa je ukupno potrebno $k = 8 \cdot 6 = 48$ sati rada da bi se taj posao obavio. Ta je veličina nepromjenljiva (fiksna). Označimo li broj radnika s $x$, a broj sati koliko će svaki od njih raditi određeni posao s $y$, onda je

$$x \cdot y = 48, \text{ to jest } y = \frac{48}{x}$$

ili, u našem primjeru,

$$y = \frac{48}{x} = \frac{48}{12} = 4.$$

Prema tome, navedeni posao obavit će 12 radnika radeći po 4 sata. Navedeno smo mogli predočiti i grafički (slika 3).




*Slika 3.*

## Primjer 10.

Ukupni godišnji neto prihod neke tvrtke u iznosu 480 000 kn realiziran je proizvodnjom i prodajom 12 000 komada proizvoda $P$, koje je proizvelo i prodalo 6 uposlenika. Ako se neto prihod dijeli na jednake iznose, koliko je dobio svaki uposlenik? Koliko bi svaki dobio da ih je bilo zaposleno

a) 4; b) 8?

Koliko je trebalo biti proizvedeno i prodano komada proizvoda $P$ ako se željelo da svaki uposlenik (od njih 6) dobije po 100 000 kn, uz pretpostavku da troškovi po jedinici proizvoda i jedinična cijena ostaju nepromijenjeni?

## Rješenje

Svaki uposlenik dobit će jednak iznos $\frac{480\,000}{6} = 80\,000\,\text{kn}$. Da ih je bilo 4, dobili bi po $\frac{480\,000}{4} = 120\,000\,\text{kn}$, a da ih je bilo 8, dobili bi po $\frac{480\,000}{8} = 60\,000\,\text{kn}$. Dakle, ako je neto prihod fiksan, broj uposlenika i broj proizvedenih i prodanih proizvoda obrnuto su razmjerne veličine. Neto prihod od 480 000 kn ostvaren je proizvodnjom i prodajom 12 000 komada proizvoda *P*. Prema tome, neto prihod po komadu proizvoda je $\frac{480\,000}{12\,000} = 40\,\text{kn}.$ Da je svaki uposlenik dobio 100 000 kn, to bi značilo da je ukupni neto prihod iznosio 6 · 100 000 kn = 600 000 kn pa, ako taj iznos podijelimo neto prihodom po komadu proizvoda P, dobivamo traženi broj proizvedenih i prodanih komada proizvoda *P*:

$$\frac{600\,000}{40} = 15\,000\,\text{kn}.$$

Budući da je neto prihod po komadu proizvoda *P* nepromijenjen, to znači da su ukupni neto prihod i broj proizvedenih i prodanih komada proizvoda *P* upravno razmjerne veličine.

## 3.3. Razmjeri i njihova svojstva

**Razmjer (proporcija) jednakost je dvaju omjera jednakih količnika.**

Dakle, ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

navedene omjere možemo pisati u obliku (jednostavnog) razmjera ovako:

$$a : b = c : d$$

i čitamo: $a$ prema $b$ odnosi se kao $c$ prema $d$. $a$ i $d$ su **vanjski članovi**, a $b$ i $c$ **unutarnji članovi** razmjera. Budući da omjer $a : b$ predstavlja količnik brojeva $a$ i $b$, a $c : d$ količnik brojeva $c$ i $d$, to razmjer $a : b = c : d$ možemo pisati i ovako:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

odakle slijedi da je

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Dakle, ako je razmjer ispravan, umnožak vanjskih članova jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera.

Primjer 11.

Odredimo za koje je realne brojeve $x$ razmjer $x : 5 = 3 : 4$ ispravan.

Rješenje

Budući da iz $x : 5 = 3 : 4$ slijedi da je $4 \cdot x = 5 \cdot 3$, to je $x = \frac{15}{4} = 3,75$.

No, za množenje realnih brojeva vrijedi zakon komutacije, pa ako je

$$a : b = c : d,$$

onda je i

$$a : c = b : d \quad \text{i} \quad d : b = c : a.$$

Razmjer ostaje ispravan ako dva unutarnja ili dva vanjska člana zamijene međusobno mjesta.

Primjer 12.

Dokažimo prethodno navedena pravila.

Rješenje

Doista, ako je $a : b = c : d$, onda je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Pomnožimo li tu jednakost s $\frac{b}{c}$, dobivamo $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{c}$ pa je $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, što i znači da je $a : c = b : d$. Analogno, iz $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ množenjem s $\frac{d}{a}$, dobivamo $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{a} = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}$, pa je $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, što i znači da je $d : b = c : a$.

Primjer 13.

Dokažimo: razmjer ostaje ispravan ako se pomnoži (podijeli) jedan unutarnji i jedan vanjski član istim brojem $k$ različitim od 0, to jest

$$a : b = c : d = \begin{cases} (k \cdot a) : (k \cdot b) = c : d \\ a : (k \cdot b) = c : (k \cdot d) \\ a : b = (k \cdot c) : (k \cdot d) \\ (k \cdot a) : b = (k \cdot c) : d \end{cases}.$$

Rješenje

Dokažimo da iz $a : b = c : d$ slijedi da je $(k \cdot a) : (k \cdot b) = c : d$. Doista, budući da je $a : b = c : d$ isto što i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, množenjem s $k$, dobivamo

$$\frac{k \cdot a}{b} = \frac{k \cdot c}{d},$$

što možemo pisati u obliku razmjera ovako:

$$(k \cdot a) : (k \cdot b) = c : d,$$

a to je i trebalo pokazati.

Preostale tri tvrdnje dokazuju se analogno.

Primjer 14.

Dokažimo tvrdnju: razmjer ostaje ispravan ako se zbroj (ili razlika) članova omjera na lijevoj strani razmjera odnosi prema zbroju (ili razlici) omjera na desnoj strani razmjera kao što se odnose po redu članovi omjera na lijevoj strani razmjera prema članovima na desnoj strani razmjera, to jest

$$a:b=c:d=\begin{cases}(a\pm b):(c\pm d)=a:c\\(a\pm b):(c\pm d)=b:d\end{cases}.$$

Rješenje

Dokažimo prvo svojstvo, to jest da iz a : $b = c : d$ slijedi $(a + b) : (c + d) = a : c$. Budući da razmjer $a : b = c : d$ možemo pisati kao jednakost razlomaka, dodajući i lijevoj i desnoj strani te jednakosti 1, dobivamo:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

ili

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

odnosno

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}.$$

Kao što smo već pokazali (primjer 12), iz $a : b = c : d$ slijedi da je $a : c = b : d$, što možemo u obliku razmjera pisati i ovako:

$$(a + b) : (c + d) = a : c,$$

a to je i valjalo dokazati. Preostale tri jednakosti dokazuju se analogno.

Iz $k$ jednostavnih razmjera:

$$\begin{gathered}a_1 : b_1 = c_1 : d_1\\ a_2 : b_2 = c_2 : d_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_k : b_k = c_k : d_k\end{gathered}$$

formira se **složeni razmjer** tako da se umnožak vanjskih članova prema umnošku unutarnjih članova razmjera lijeve strane odnosi kao umnožak unutarnjih članova prema umnošku vanjskih članova razmjera desne strane, to jest

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) : (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k) = (c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_k) : (d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k).$$

Primjer 15.

Formirajmo složeni razmjer od sljedeća dva jednostavna razmjera:

$$2 : 3 = 4 : 6,\ \ 6 : 7 = 18 : 21.$$

Rješenje

Dakle,

$$(2 \cdot 6) : (3 \cdot 7) = (4 \cdot 18) : (6 \cdot 21),$$

odnosno,

$$12 : 21 = 72 : 126.$$

Ako $k$ omjera ima jednaki količnik, to jest ako je

$$a_1 : b_1 = q$$
$$a_2 : b_2 = q$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k : b_k = q,$$

od njih se formira **produženi razmjer** na sljedeći način:

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k.$$

Naravno, ako je

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k,$$

to znači da postoji $k$ jednostavnih omjera jednakih količnika:

$$a_1 : b_1 = q$$
$$a_2 : b_2 = q$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k : b_k = q.$$

Primjer 16.

Formirajmo produženi razmjer od sljedeća tri jednostavna omjera:

$$50 : 25 = 2, \;\; 12 : 6 = 2, \;\; 7 : \frac{7}{2} = 2.$$

Rješenje

Budući da se radi o tri jednostavna omjera jednakog količnika, to je traženi produženi razmjer

$$50 : 12 : 7 = 25 : 6 : \frac{7}{2}.$$

Primjer 17.

Pokažimo da produženi razmjer ostaje ispravan ako se pomnože svi članovi samo lijeve ili samo desne strane produženog razmjera istim brojem $p$, $p \neq 0$, to jest

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k = \begin{cases} (a_1 \cdot p) : (a_2 \cdot p) : \ldots : (a_k \cdot p) = b_1 : b_2 : \ldots : b_k \\ a_1 : a_2 : \ldots : a_k = (b_1 \cdot p) : (b_2 \cdot p) : \ldots : (b_k \cdot p) \end{cases}.$$

Rješenje

Dokazat ćemo: ako je

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k ,$$

onda je

$$(a_1 \cdot p) : (a_2 \cdot p) : \ldots : (a_k \cdot p) = b_1 : b_2 : \ldots : b_k .$$

Ako je,

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k ,$$

to znači da postoji $k$ jednostavnih omjera jednakih količnika:

$$a_1 : b_1 = q$$
$$a_2 : b_2 = q$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k : b_k = q.$$

Tada je za bilo koji broj $p$, $p \neq 0$,

$$(a_1 \cdot p) : b_1 = q \cdot p$$
$$(a_2 \cdot p) : b_2 = q \cdot p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_k \cdot p) : b_k = q \cdot p,$$

a to, po definiciji produženog razmjera, upravo znači da je

$$(a_1 \cdot p) : (a_2 \cdot p) : \ldots : (a_k \cdot p) = b_1 : b_2 : \ldots : b_k ,$$

što je i valjalo pokazati. Druga tvrdnja dokaže se na analogan način.

Primjer 18.

Pokažimo da produženi razmjer ostaje ispravan ako se zbroj (razlika) članova lijeve strane odnosi prema zbroju (razlici) članova desne strane produženog razmjera kao bilo koji član lijeve strane prema odgovarajućem članu desne strane, to jest

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k = \begin{cases} (a_1 \pm b_1) : (a_2 \pm b_2) : \ldots : (a_k \pm b_k) = a_1 : b_1 \\ (a_1 \pm b_1) : (a_2 \pm b_2) : \ldots : (a_k \pm b_k) = a_1 : b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a_1 \pm b_1) : (a_2 \pm b_2) : \ldots : (a_k \pm b_k) = a_1 : b_1 \end{cases} .$$

Rješenje

Pokazat ćemo: ako je

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_k = b_1 : b_2 : \ldots : b_k,$$

onda je

$$(a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_k) : (b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_k) = a_1 : b_1.$$

Vidjeli smo da, ako je

$$a_1 : a_2 : ... : a_k = b_1 : b_2 : ... : b_k,$$

postoji $k$ jednostavnih omjera jednakih količnika:

$$a_1 : b_1 = q$$
$$a_2 : b_2 = q$$
$$........$$
$$a_k : b_k = q.$$

To znači da je $a_i = q \cdot b_i$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, pa je

$$a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k = q\, b_1 \pm q\, b_2 \pm ... \pm q\, b_k =$$
$$= q(b_1 \pm b_2 \pm ... \pm \text{bk}\ ) = (a_1 : b_1) \cdot (b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k\ ).$$

Očito je da se posljednja jednakost

$$a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k = (a_1 : b_1) \cdot (b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k\ ).$$

može pisati u obliku traženog razmjera:

$$(a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_k) : (b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k) = a_1 : b_1.$$

Ostale tvrdnje dokazuju se analogno.

Primjer 19.

Za sljedeća tri jednostavna razmjera

$$a : b = 2 : 3,\ \ b : c = 4 : 5,\ \ c : d = 6 : 7$$

formirajmo produženi razmjer.

Rješenje

Iz

$$a : b = 2 : 3 \text{ i } b : c = 4 : 5$$

slijedi da je

$$a : b : c = 8 : 12 : 15,$$

a iz

$$b : c = 4 : 5 \text{ i } c : d = 6 : 7$$

je

$$b : c : d = 24 : 30 : 35$$

odakle je

$$a : b : c : d = 16 : 24 : 30 : 35.$$

## 3.4. Postotni račun

**Postotak je broj kojim se označava koliko jedinica neke veličine dolazi na sto jedinica iste veličine.**

Postotak se izračunava iz razmjera

$$\text{dio} : \text{cjelina} = \text{postotak} : 100.$$

Prema tome, označimo li sa $S$ **temeljnu veličinu**, s $P$ **postotni dio** i s $p$ **postotak**, koristeći se razmjerom

$$P : S = p : 100,$$

možemo izračunati jednu od navedenih triju veličina ($S$, $p$ ili $p$) ako su poznate ostale dvije.

**1.** Ako je poznata temeljna veličina $S$ i postotni dio $P$, postotak $p$ računamo formulom

$$p = \frac{100P}{S}.$$

Primjer 20.

Cijena neke robe iznosila je prije poskupljenja 125 kn, a nakon poskupljenja, 130 kn. Za koliko se postotaka cijena povećala?

Rješenje

Ovdje je temeljna veličina početna cijena $S = 125$ kn, a postotni je dio povećanje cijene izraženo u kunama: $P = 5$ kn. Prema tome, traženi postotak povećanja iznosi

$$P = 100 \cdot \frac{5}{125} = 4.$$

Kažemo da se cijena razmatrane robe povećala za 4%.

Primjer 21.

Cijena neke robe iznosila je prije sniženja 125 kn, a nakon sniženja 100 kn. Za koliko se postotaka cijena smanjila?

Rješenje

Ponovno je temeljna veličina početna cijena $S = 125$ kn, a postotni je dio sniženje cijene izraženo u kunama: $P = 25$ kn. Prema tome, traženi je postotak smanjenja cijene

$$P = 100 \cdot \frac{25}{125} = 20.$$

Kažemo da se cijena razmatrane robe smanjila za 20%.

**2.** Ako je poznata temeljna veličina $S$ i postotak $p$, postotni dio $P$ računamo formulom

$$P=\frac{pS}{100}.$$

Primjer 22.

Početna cijena neke robe iznosila je 125 kn. Kolika je cijena nakon povećanja za 8%?

Rješenje

Budući da je $S = 125$ kn, a postotak povećanja $p = 8$, to je cijena povećana za

$$P=\frac{8\cdot 125}{100}=10.$$

Dakle, cijena je razmatrane robe nakon navedenog povećanja

$$125 \text{ kn} + 10 \text{ kn} = 135 \text{ kn}.$$

Primjer 23.

Početna cijena neke robe iznosila je 125 kn. Kolika je cijena nakon smanjenja za 8%?

Rješenje

Budući da je $S = 125$ kn, a postotak povećanja $p = 8$, to je cijena povećana za

$$P=\frac{8\cdot 125}{100}=10.$$

Dakle, cijena je razmatrane robe nakon navedenog povećanja

$$125 \text{ kn} - 10 \text{ kn} = 115 \text{ kn}.$$

**3.** Ako je poznat postotni dio $P$ i postotak $p$, temeljnu veličinu $S$ izračunat ćemo formulom

$$S=\frac{100P}{p}.$$

Primjer 24.

Cijena neke robe povećala se za 25 kn, odnosno, za 20%. Izračunajmo cijenu te robe prije i poslije naznačene promjene.

Rješenje

Zanima nas od kojega je iznosa 25 kn 20%. Dakle, trebamo izračunati vrijednost temeljne veličine. U razmatranom slučaju ona iznosi

$$S = \frac{100 \cdot 25}{20} = 125.$$

Prema tome, početna je cijena robe bila 125 kn, a nakon poskupljenja za 20%, ona iznosi

$$125 \text{ kn} + 25 \text{ kn} = 150 \text{ kn}.$$

### Primjer 25.

Cijena neke robe smanjila se za 7,50 kn, odnosno, za 6%. Izračunajmo cijenu te robe prije i poslije naznačene promjene.

### Rješenje

Sada nas zanima od kojega je iznosa 7,50 kn 6%. Dakle, ponovno trebamo izračunati vrijednost temeljne veličine. U razmatranom slučaju ona iznosi

$$S = \frac{100 \cdot 7{,}5}{6} = 125.$$

Prema tome, početna je cijena robe bila 125 kn, a nakon smanjenja cijene za 6%, ona iznosi

$$125 \text{ kn} - 7{,}50 \text{ kn} = 117{,}50 \text{ kn}.$$

Kod postotnog računa ne mora uvijek biti poznata temeljna veličina $S$. Može biti poznata ta veličina uvećana ili umanjena za postotni dio, to jest može biti poznata ili veličina $S + P$ ili $S - P$. U slučaju da je poznata veličina $S + P$, govorimo o **postotnom računu više 100**, a ako je poznata veličina $S - P$, govorimo o **postotnom računu niže 100**.

**A** Razmotrimo najprije slučaj kada je poznata veličina $S + P$, to jest kada je poznata temeljna veličina $S$ uvećana za postotni dio $P$. Već smo istaknuli da moraju biti poznate dvije od tri veličine da bismo mogli izračunati treću. Zato imamo tri podslučaja.

**A-1** Pretpostavimo da je, osim veličine $S + P$, poznat još i postotak $p$. Budući da je

$$P = \frac{pS}{100}.$$

to je

$$S + P = S + \frac{pS}{100} = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

pa je temeljna veličina

$$S=\frac{100(S+P)}{100+p}.$$

Naravno,

$$P=(S+P)-P=(S+P)-\frac{100(S+P)}{100+p}=$$

$$=\frac{100(S+P)+p(S+P)-100(S+P)}{100+p}=\frac{p(S+P)}{100+p}.$$

Dakle,

$$P=\frac{p(S+P)}{100+p}.$$

Primjer 26.

Cijena neke robe, nakon povećanja za 12%, iznosi 140 kn. Za koji se iznos cijena povećala i kolika je bila prije povećanja?

Rješenje

Ovdje se, očito, radi o postotnom računu više 100, jer je poznata veličina koja predstavlja zbroj temeljne veličine i postotnog dijela, to jest veličina $S + P = 140$ kn. Budući da je poznat još i postotak $p = 12$, to je početna cijena bila

$$S=\frac{100\cdot 140}{100+12}=\frac{14\,000}{112}=125,$$

a samo povećanje iznosi

$$P=\frac{12\cdot 140}{100+12}=\frac{1680}{112}=15.$$

Naravno, povećanje smo mogli izračunati i jednostavnije: ono predstavlja razliku između konačne cijene (to jest cijene nakon naznačene promjene) i početne cijene pa je

$$P = 140 \text{ kn} - 125 \text{ kn} = 15 \text{ kn}.$$

**A-2** Ako je osim veličine $S+P$ poznat još i postotni dio $P$, tada se temeljna veličina izračuna veoma jednostavno:

$$S=(S+P)-P.$$

Budući da je

$$p=\frac{100P}{S}.$$

to se postotak u razmatranom podslučaju računa na sljedeći način:

$$p=\frac{100P}{S}=\frac{100P}{(S+P)-P}.$$

Dakle,

$$p = \frac{100\,P}{(S+P)-P}.$$

Primjer 27.

Cijena neke robe povećala se za 15 kn i sada iznosi 140 kn. Za koji se postotak cijena povećala i kolika je bila prije povećanja?

Rješenje

Budući da je poznata konačna cijena ($S + P$ =140 kn) i iznos povećanja ($P$ = 15 kn), to je početna cijena bila

$$S = (S + P) - P = 140 \text{ kn} - 15 \text{ kn} = 125 \text{ kn}.$$

Postotak povećanja računamo na sljedeći način:

$$p = \frac{100\,P}{S} = \frac{100 \cdot 15}{125} = 12.$$

Dakle, cijena se povećala za 12%.

**A-3** Ako je, osim veličine $S + P$, poznata još i temeljna veličina $S$, postotni dio $P$ izračunat ćemo veoma jednostavno:

$$P = (S + P) - S.$$

Budući da je

$$P = \frac{pS}{100},$$

to se postotak u razmatranom podslučaju računa na sljedeći način:

$$p = \frac{100P}{S} = \frac{100 \cdot \left[(S+P)-S\right]}{S}.$$

Prema tome,

$$p = \frac{100 \cdot \left[(S+P)-S\right]}{S}.$$

Primjer 28.

Početna cijena neke robe iznosila je 125 kn. Nakon povećanja, cijena te robe je 135 kn. Izračunajmo postotni dio promjene, a zatim ga izrazimo u postotku u odnosu na početnu cijenu.

Rješenje

Budući da je $S$ = 125 kn, a $(S + P)$ = 135 kn, to je cijena povećana za

$$P = (S + P) - S = 135 \text{ kn} - 125 \text{ kn} = 10 \text{ kn},$$

odnosno, izraženo u postotcima u odnosu na početnu cijenu

$$p = \frac{100 \cdot 10}{125} = 8.$$

Cijena se, dakle, povećala za 10 kn, odnosno za 8%.

**B** Sada ćemo analizirati slučaj kada je poznata veličina $S - P$, to jest kada je poznata temeljna veličina $S$ umanjena za postotni dio $P$. I sada imamo tri podslučaja.

**B-1** Pretpostavimo da je, osim veličine $S - P$, poznat još i postotak $p$. Budući da je

$$P = \frac{pS}{100},$$

to je

$$S + P = S + \frac{pS}{100} = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

pa je temeljna veličina

$$S = \frac{100 \cdot (S+P)}{100 + p}.$$

Naravno, iz $p = (S + P) - S$ slijedi

$$P = (S+P) - S = (S+P) - \frac{100 \cdot (S+P)}{100+p} =$$

$$= \frac{100 \cdot (S+P) + p(S+P) - 100 \cdot (S+P)}{100+p} = \frac{p(S+P)}{100+p}.$$

Dakle,

$$P = \frac{p(S+P)}{100+p}.$$

## Primjer 29.

Cijena neke robe, nakon smanjenja 12%, iznosi 110 kn. Za koji se iznos cijena smanjila i kolika je bila prije smanjenja?

## Rješenje

Ovdje se očito radi o postotnom računu niže 100 jer je poznata veličina koja predstavlja razliku temeljne veličine i postotnog dijela, to jest veličina $S - P = 110$ kn. Budući da je poznat još i postotak smanjenja cijene $p = 12$, to je početna cijena bila

$$S = \frac{100 \cdot 140}{100 + 12} = \frac{14\,000}{112} = 125 \text{ kn},$$

a samo smanjenje iznosi

$$P = \frac{12 \cdot 140}{100 + 12} = \frac{1680}{112} = 15 \text{ kn}.$$

Naravno, smanjenje smo mogli izračunati i jednostavnije: ono predstavlja razliku između početne cijene (to jest cijene nakon naznačene promjene) i konačne cijene pa je

$$P = 125\text{ kn} - 110\text{ kn} = 15\text{ kn}.$$

**B-2** Ako je osim veličine $S - P$ poznat još i postotni dio $P$, temeljna se veličina može izračunati veoma jednostavno:

$$S = (S + P) - P.$$

Budući da je

$$p = \frac{100\,P}{S},$$

to se postotak u razmatranom podslučaju računa na sljedeći način:

$$p = \frac{100\,P}{S} = \frac{100\,P}{(S+P)-P}.$$

Dakle,

$$p = \frac{100\,P}{(S+P)-P}.$$

Primjer 30.

Cijena neke robe smanjila se za 15 kn i sada iznosi 110 kn. Za koji se postotak cijena smanjila i kolika je bila prije smanjenja?

Rješenje

Budući da je poznata konačna cijena ($S + P = 110$ kn) i iznos smanjenja ($P = 15$ kn), to je početna cijena bila

$$S = 110\text{ kn} + 15\text{ kn} = 125\text{ kn}.$$

Postotak smanjenja računamo na sljedeći način:

$$p = \frac{100\,P}{S} = \frac{100 \cdot 15}{125} = 12.$$

Dakle, cijena se smanjila za 12%.

**B-3** Ako je osim veličine $S - P$ poznata još i temeljna veličina $S$, postotni se dio $P$ može izračunati veoma jednostavno:

$$P = S - (S - P).$$

Budući da je

$$p = \frac{100P}{S},$$

to se postotak u razmatranom podslučaju računa na sljedeći način:

$$p=\frac{100P}{S}=\frac{100\left[S-(S-P)\right]}{S}.$$

Primjer 31.

Početna je cijena neke robe iznosila 125 kn. Nakon smanjenja, cijena je 115 kn. Izračunajmo postotni dio promjene, a zatim ga izrazimo u postotku u odnosu na početnu cijenu.

Rješenje

Budući da je $S = 125$ kn, a $S - P = 115$ kn, to je cijena smanjena za

$$P = S - (S - P) = 125 \text{ kn} - 115 \text{ kn} = 10 \text{ kn},$$

odnosno, izraženo u postotcima u odnosu na početnu cijenu

$$p=\frac{100\cdot 10}{125}=8.$$

Cijena se, dakle, smanjila za 10 kn, odnosno za 8%.

**Promil je broj kojim se označuje koliko jedinica jedne veličine dolazi na tisuću jedinica iste veličine.**

Dakle, promil se izračunava iz razmjera

dio : cjelina = promil : 1000.

Prema tome, označimo li sa $S$ **temeljnu veličinu**, s $P$ **promilni dio** i s $p$ **promil**, koristeći se razmjerom

$$P : S = p : 1000.$$

možemo, analogno kao u postotnom računu, izračunati jednu od navedenih triju veličina ($S$, $P$ ili $p$) ako su poznate ostale dvije. Skraćeni zapis za $\frac{p}{1000}$ je $p$‰ (čitamo: $p$ promila).

Primjer 32.

Za koji je iznos za proviziju od 1,5% i osiguranje od 2,5‰ plaćeno ukupno 3500 kn?

Rješenje

Budući da je 1,5% + 2,5‰ = 1,5% + 0,25% = 1,75%, potrebno je izračunati od kojeg iznosa 1,75% iznosi 3500 kn. Naravno, traženi iznos je

$$S=\frac{3\,500\cdot 100}{1,75}=200\,000.$$

Dakle, navedena provizija i osiguranje plaćeni su za iznos od 200 000 kn.

## Zadatci

### Omjeri

1. Pojednostavni sljedeće omjere:

   a) 18 : 40; b) 23 : 69; c) 64 : 1024; d) $\frac{8}{5}:3$; e) $\frac{4}{7}:\frac{8}{9}$.

2. Pojednostavni sljedeće omjere:

   a) $42a : 56a^2$, $a \neq 0$; b) $(21ab-3a^2):(6a-9ab^2)$;

   c) $49a^2b^2 : 14a^3b$; d) $(13xyz^2-39x^2y^2):(26x^2yz+52xy^2z)$.

3. Izračunaj prvi član omjera ako je:

   a) $x : 8 = 5$; b) $x:\frac{5}{7}=0$; c) $x:\frac{13}{3}=3$;

   d) $x:(a^2+1)=a^2-1$ e) $x:(a^2-a)=\frac{1}{a^2-1}$.

4. Izračunaj drugi član omjera ako je:

   a) $6 : x = 5$; b) $\frac{7}{3}:x=\frac{8}{6}$; c) $(a^2-a):x=a^3-1$; d) $(a^4-1):x=a^2-1$.

5. Izračunaj vrijednost sljedećih omjera:

   a) $5\frac{5}{8}:12\frac{3}{8}$; b) $\frac{8a}{5b}:\frac{4a}{15b}$; c) $\frac{6xy}{10z}:\frac{2x}{5z}$;

   d) $\frac{6(x+y)^2}{x-y}:\frac{x+y}{3}$; e) $\frac{a^2-8a+16}{2m+n}:\frac{a-4}{m+2n}$.

6. Dijagonale romba odnose se kao 2:3. Odredi opseg romba ako mu je površina $\frac{12}{13}$.
7. Ako vrijede omjeri $x : y = 2 : 3$ i $y : z = 1 : 2$, odredi omjer $x : z$.
8. Ako je $a : b = 5 : 12$, $b : c = 9 : 1$ i $2a - b + 3c = 84$, odredi $a + b + c$.
9. Formiraj produženi omjer iz sljedećih jednostavnih omjera:

   a) 1 : 2 i 1 : 6; b) 2 : 3 i 7 : 8; c) 5 : 4 i 8 : 13; d) 17 : 16 i 2 : 5 i 20 : 21;

   e) 6 : 7 i 14 : 15 i 25 : 26; f) $2a : (a-1)$ i $(a^2-1) : (a^2+1)$; g) $(a-1) : (a+1)$ i $(a^2-1) : (a^2+1)$.

10. Ako je $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 5$ i $c : d = 5 : 8$, odredi omjer $a : d$.
11. Ako je $(ab) : (ac) : (bc) = 3 : 2 : 1$, izračunaj čemu je jednak omjer $\frac{a}{bc}:\frac{b}{ac}$.
12. Odredi dva realna broja čiji omjer je jednak njihovoj razlici koja je $\frac{9}{2}$.
13. Odredi u kojem omjeru sjecište dužine $\overline{AB}$, $A(-1, 1)$, $B(5, 7)$, s osi ordinata dijeli tu dužinu ako traženi omjer gledamo od točke $A$.
14. Ako se razlika, zbroj i umnožak dvaju realnih brojeva odnose kao 1 : 7 : 24, odredi umnožak tih brojeva.

15. Ako je poznato da je prosječna masa dječaka u jednom razredu 54 kg, djevojčica 48 kg, a prosječna masa svih učenika u tom razredu 51,6 kg, odredi omjer broja djevojčica i dječaka u tom razredu.
16. Ako se kutovi u trokutu odnose kao $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 5$, odredi ih.

**Upravna i obrnuta razmjernost**

17. Neka osoba kupi 5 jaja i za to plati 6 kn. Ako je cijena jajima ostala nepromijenjena, izračunaj koliko mora platiti za:

    a) 12 jaja; b) 25 jaja .
18. Ako tri puna pansiona u nekom hotelu u Istri stoje 720 kn, izračunaj koliko u tom hotelu stoji:

    a) 5 punih pansiona; b) 10 punih pansiona; c) 18 punih pansiona.
19. Neka osoba je tijekom cijele prošle godine na štednoj knjižici imala iznos 2000 kn i na temelju tog iznosa dobila je 130 kn kamata. Koliko bi ta osoba dobila na račun kamata da je na štednji imala:

    a) 28 000 kn; b) 54 000 kn?
20. Neka osoba je tijekom cijele prošle godine na štednoj knjižici imala iznos 2000 kn i na temelju tog iznosa dobila je 130 kn kamata. Koliko je ta osoba trebala imati na štednoj knjižici ako je željela da na račun kamata dobije:

    a) 650 kn; b) 975 kn?
21. Neka osoba je tijekom cijele prošle godine na štednoj knjižici imala iznos 5000 kn i na temelju tog iznosa dobila je 400 kn kamata. Koliko bi ta osoba dobila na račun kamata da je na štednji imala:

    a) 28 000 kn; b) 54 000 kn?
22. Neka osoba je tijekom cijele prošle godine na štednoj knjižici imala iznos 5000 kn i na temelju tog iznosa dobila je 400 kn kamata. Koliko je ta osoba trebala imati na štednoj knjižici ako je željela da na račun kamata dobije:

    a) 650 kn; b) 975 kn?
23. Neka osoba želi za 1000 kn kupiti u mjenjačnici američke dolare ($). Koliko će dolara kupiti ako mjenjačnjica za 1 $ traži:

    a) 8 kn; b) 8,12 kn; c) 8,2 kn?

    Rezultate zaokruži na dvije decimale.
24. Neka osoba udaljenost između dva grada propješaći za 4 sata krećući se prosječnom brzinom od 5 km/h. Koliko joj vremena treba da pretrči tu udaljenost ako trči prosječnom brzinom:

    a) 8 km/h; b) 12 km/h?
25. Pet radnika obavi neki posao radeći 12 dana po 8 sati dnevno. Koliko radnika je potrebno da se obavi taj posao ako ga trebaju završiti za:

    a) 6 dana; b) 10 dana

    radeći također po 8 sati dnevno? Pretpostavljamo da je učinkovitost svakog radnika svakog dana jednaka.

26. Petnaest radnika obavi neki posao radeći 12 dana po 8 sati dnevno. Za koliko će se dana obaviti taj posao ako ga trebaju završiti:

a) devetorica radnika; b) desetorica radnika;

c) dvanaestorica radnika; d) osamnaestorica radnika.

radeći također po 8 sati dnevno? Pretpostavljamo da je učinkovitost svakog radnika svakog dana jednaka.

27. Ukupni godišnji neto prihod neke tvrtke u iznosu 490 000 kn realiziran je proizvodnjom i prodajom 7000 komada proizvoda *P*, koje je proizvelo i prodalo 7 uposlenika. Ako se neto prihod dijeli na jednake iznose, koliko je dobio svaki uposlenik? Koliko bi svaki dobio da ih je bilo zaposleno

a) 5; b) 10?

Koliko je trebalo biti proizvedeno i prodano komada proizvoda *p* ako se željelo da svaki uposlenik (od njih 7) dobije po 100 000 kn ako se pretpostavi da bi troškovi po jedinici proizvoda i jedinična cijena ostali nepromijenjeni?

**Razmjeri i njihova svojstva**

28. Odredi za koje su realne brojeve $x$ sljedeći razmjeri ispravni:

a) $x : 3 = 8 : 17$; b) $\frac{2}{3} : x = 1 : \frac{3}{2}$; c) $(a+b) : x = (a^2 - b^2) : 2$.

29. Formiraj produženi razmjer od sljedećih triju jednostavnih omjera:

a) $5 : 2$, $\frac{5}{4} : \frac{1}{2}$ i $10 : 4$; b) $(4a^2bc) : (ab), (16abc) : (4b), (4a^2bc + 4ac) : (ab+1)$.

30. Možeš li formirati produženi razmjer od triju jednostavnih omjera? Ako možeš, učini to.

a) $3 : 4$ i $5 : 6$ i $7 : 8$; b) $2 : 3$ i $(4ab - 6a) : (6ab - 9a)$ i $(8xy + 10y) : (12xy + 15y)$.

31. Najprije proširi desnu stranu razmjera tako da se oslobodiš razlomaka, a zatim odredi za koje su realne brojeve $x$ navedeni razmjeri ispravni:

a) $x : 4 = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; b) $x : 3 = \frac{5}{3} : \frac{7}{8}$; c) $2 : x = \frac{11}{7} : \frac{22}{21}$.

32. Dokaži: ako je $a : b = c : d$, onda je $(a + b) : (c + d) = a : c$.

33. Provjeri da sljedeći omjeri $4 : 5$, $12 : 15$, $16 : 20$ imaju jednake količnike, a zatim od njih formiraj produženi razmjer.

34. Provjeri da sljedeća tri omjera

$$a : (ab),\ (a + b) : (ab + b^2) \text{ i } (ab + b) : (ab^2 + b^2),$$

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -a$, imaju jednake količnike, a zatim od njih formiraj produženi razmjer.

35. Formiraj složeni razmjer od sljedećih parova jednostavnih razmjera:

a) $3 : 5 = 15 : 25$ i $1 : 2 = 8 : 16$; b) $\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = 14 : 4$ i $\frac{28a}{b} : \frac{24a}{3b} = 7 : 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

## Rješenja

1. a) 9 : 20; b) 1 : 3; c) 1 : 16; d) 8 : 15; e) 9 : 14.

2. a) 3 : 4$a$; b) $(7b-a):(2-3b^2)$ ; c) 7$b$ : 2$a$; d) $(z^2-3xy):(2xz+4yz)$. .

3. a) $x$ = 40; b) $\frac{50}{7}$ ; c) $x$ = 13; d) $x = a^4 - 1$; e) $x=\frac{a}{a+1}$. 4. a) $x=\frac{6}{5}$; b) $x=\frac{7}{4}$; c) $x = a^2 + 1$.

5. a) $\frac{5}{11}$ ; b) 6; c) $\frac{3y}{2}$ ; d) $\frac{18(x+y)}{x-y}$ ; e) $\frac{(a-4)(m+2n)}{2m+n}$.

6. Iz $a=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}$, $e:f = 2:3$ i $P=\frac{ef}{2}$ slijedi da je $a = 1$, pa je $o = 4$.

7. $x : z = 1 : 3$.

8. Iz produženog razmjera $a : b : c = 15 : 36 : 4$ slijedi da je $a = 15k$, $b = 36k$, $c = 4k$, a iz uvjeta $2a - b + 3c = 84$ nalazimo da je faktor razmjernosti $k = 14$. Zato je $a + b + c = 770$.

9. a) 1 : 2 : 12; b) 14 : 12 : 24; c) 10 : 8 : 13; d) 17 : 16 : 40 : 42;
e) 60 : 70 : 75 : 78; f) $2a(a+1):(a^2-1):(a^2+1)$ ;g) $(a-1)^2:(a^2-1):(a^2+1)$.

10. Iz produženog razmjera $a : b : c : d = 8 : 12 : 15 : 24$ slijedi $a : d = 1 : 3$.

11. 4 : 1. 12. $\frac{81}{14}$ i $\frac{9}{7}$. 13. 1 : 5. 14. 48. 15. 2 : 3. 16. $\alpha = 20°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 100°$.

17. a) 14,4 kn; b) 30 kn. 18. a) 1200 kn; b) 2400 kn; c) 4320 kn. 19. a) 1820 kn; b) 3510 kn.

20. a) 10 000 kn; b) 15 000 kn. 21. a) 2240 kn; b) 4320 kn. 22. a) 8125 kn; b) 12 187,5 kn.

23. a) 125 \$; b) 123,15 \$; c) 121,95 \$. 24. a) 2,5 sata; b) 1 sat 40 minuta. 25. a) 10 radnika; b) 6 radnika.

26. a) 20 dana; b) 18 dana; c) 12 dana; d) 10 dana.

27. Svaki je uposlenik dobio po 70 000 kn. a) po 98 000 kn; b) po 49 000 kn. Trebalo je biti proizvedeno i prodano 10 000 komada proizvoda *P*.

28. a) $x=\frac{24}{17}$; b) $x = 1$; c) $x=\frac{2}{a-b}$ .

29. Najprije provjeri da navedeni jednostavni omjeri imaju jednak količnik $q$:

a) $q=\frac{5}{2}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{10}{4}$, pa je $5:\frac{5}{4}:10=2:\frac{1}{2}:4$

b) $q=\frac{4a^2bc}{ab}=\frac{16abc}{4b}=\frac{4a^2bc+4ac}{ab+1}=4ac$, pa je $(4a^2bc):(16abc):(4a^2bc+4ac)=(ab):(4b):(ab+1)$.

30. a) Budući da je $\frac{3}{4}\neq\frac{5}{6}\neq\frac{7}{8}$, *ne može se* formirati produženi razmjer. b) Budući da je $\frac{2}{3}=\frac{4ab-6a}{ab-9a}=\frac{8xy+10y}{12xy+15y}$, *može se* formirati produženi razmjer: $2:(4ab-6a):(8xy+10y)=3:(ab-9a):(12xy+15y)$.

31. a) $x = 8$; b) $x=\frac{40}{7}$ ; c) $x=\frac{40}{3}$.

32. Iz $a : b = c : d$ slijedi da je $bc = ad$ pa, dodamo li lijevoj i desnoj strani izraz $ac$, imamo da je $ac + bc = ac + ad$. Nakon izlučivanja zajedničkog faktora, nalazimo: $(a+b)c=(c+d)a$, što znači da je $(a+b):(c+d)=a:c$.

33. Budući da je to je 4 : 12 : 16 = 5 : 15 : 20 .

34. Budući da to je traženi produženi razmjer: $q=\frac{a}{ab}=\frac{a+b}{ab+b^2}=\frac{ab+b}{ab^2+b^2}=\frac{1}{b}$.

35. Najprije provjeri jesu li navedeni jednostavni razmjeri istiniti. a) 3 : 10 = 120 : 400; b) $\frac{49a}{2b}:\frac{2a}{b}=98:8$.