

Đurđica Salamon Padjen • Boško Šego • Tihana Škrinjarić

# MATEMATIKA 4

udžbenik sa zbirkom zadataka  
za ekonomiste i komercijaliste  
IV. razred

prvo izdanje  
Zagreb, 2014.



# SADRŽAJ

<b>1. BROJEVNI SUSTAVI .....</b>	<b>10</b>
1.1. Brojevni sustavi .....	10
1.2. Prikaz broja u odabranom brojevnom sustavu .....	12
1.3. Pretvaranje broja iz jednog u drugi brojevni sustav .....	15
1.4. Traženje baze .....	16
Zadatci .....	19
Rješenja .....	20
<b>2. PRIMJENE NIZOVA I REDOVA .....</b>	<b>22</b>
2.1. Općenito o nizovima .....	22
2.1.1. Aritmetički niz .....	26
2.1.2. Opći član aritmetičkog niza .....	28
2.1.3. Zbroj prvih $n$ članova aritmetičkog niza .....	30
Riješeni zadatci za vježbu .....	32
Zadatci .....	36
Rješenja .....	39
2.1.4. Geometrijski niz .....	41
Zadatci .....	44
Rješenja .....	46
2.1.5. Primjena geometrijskog niza na izračun kamata .....	47
2.1.5.1. Konačna vrijednost jednog iznosa .....	47
2.1.5.2. Konačna vrijednost više jednakih iznosa .....	51
Zadatci .....	55
Rješenja .....	57
2.1.6. Granična vrijednost niza .....	58
2.1.7. Redovi .....	64
2.1.7.1. Konvergentni geometrijski red i njegova suma .....	66
2.1.7.2. Primjena konvergentnog geometrijskog reda .....	68
Zadatci .....	70
Rješenja .....	70
<b>3. GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE .....</b>	<b>72</b>
3.1. Pojam i definicija granične vrijednosti .....	72
3.1.1. Svojstva graničnih vrijednosti .....	73
3.1.2. Granična vrijednost kvocijenta polinoma .....	75

Riješeni zadatci za vježbu.....	80
3.1.3. Asimptote krivulje .....	83
Zadatci .....	87
Rješenja .....	87
<b>4. POJAM I DEFINICIJA DERIVACIJE REALNE FUNKCIJE .....</b>	<b>90</b>
4.1. Definicija derivacije.....	90
4.2. Problem tangente .....	92
4.3. Pravila deriviranja.....	93
4.3.1. Derivacija zbroja.....	93
4.3.2. Derivacija razlike.....	93
4.3.3. Derivacija umnoška .....	94
4.3.4. Derivacija kvocijenta.....	95
4.3.5. Derivacija nekih elementarnih funkcija.....	96
4.3.5.1. Derivacije konstante .....	96
4.3.5.2. Derivacija umnoška konstante i derivabilne funkcije.....	96
4.3.5.3. Derivacija neovisne varijable .....	96
4.3.5.4. Derivacija potencije.....	97
Zadatci .....	102
Rješenja .....	102
4.3.5.1. Derivacija trigonometrijskih funkcija.....	103
Zadatci .....	107
Rješenja .....	107
4.3.5.2. Derivacija složene funkcije .....	108
4.3.5.3. Derivacija logaritamske funkcije.....	109
Zadatci .....	111
Rješenja .....	111
4.3.5.4. Deriviranje inverznih funkcija.....	112
4.3.5.5. Derivacija eksponencijalne funkcije.....	112
Zadatci .....	114
Rješenja .....	114
4.3.5.6. Derivacije funkcije zadane u implicitnom obliku.....	115
4.3.5.7. Derivacije višeg reda .....	115
4.3.5.8. Diferencijal funkcije.....	118
Zadatci .....	122
Rješenja .....	122

4.3.5.9. Jednadžba tangente i normale.....	123
Zadatci .....	126
Rješenja .....	126
4.3.5.10. Proučavanje funkcija pomoću derivacija.....	127
4.3.5.10.1. Intervali monotonosti funkcija.....	127
Zadatci .....	130
Rješenja .....	130
4.3.5.10.2. Uvjeti za ekstreme derivabilnih funkcija.....	131
Zadatci .....	134
Rješenja .....	134
4.3.5.10.3. Intervali zakrivljenosti funkcija.....	135
Zadatci .....	138
Rješenja .....	138
4.3.5.10.4. Točke infleksije realne funkcije.....	139
Zadatci .....	141
Rješenja .....	141
4.3.5.11. Grafičko predočavanje realnih funkcija.....	142
Zadatci .....	151
Rješenja .....	151

## **5. INTEGRALNI RAČUN ..... 156**

5.1. Primitivna i podintegralna funkcija.....	157
5.2. Osnovna pravila integriranja .....	158
5.3. Neodređeni integrali nekih jednostavnijih funkcija.....	159
5.4. Neke metode integriranja.....	160
5.4.1. Direktna integracija .....	160
5.4.2. Metoda supstitucije.....	162
5.4.3. Metoda parcijalne integracije .....	165
Zadatci .....	168
Rješenja .....	169
5.5. Problem računanja mjernog broja površine lika.....	170
5.5.1. Metoda ekshaustije (iscrpljivanja).....	170
5.5.2. Problem površine.....	172
5.5.3. Određeni integral .....	175
5.5.4. Osnovna svojstva određenog integrala.....	178
5.5.5. Izračunavanje površine ispod grafa kvadratne funkcije .....	179

Zadaci .....	189
Rješenja .....	191
<b>6. PODATCI .....</b>	<b>194</b>
6.1. Srednje vrijednosti statističkih nizova .....	195
6.1.1. Aritmetička sredina .....	195
6.1.2. Geometrijska i harmonijska sredina .....	198
6.1.3. Mod i medijan .....	199
Zadaci .....	202
Rješenja .....	203
6.2. Utjecaj dodavanja ili uklanjanja podataka na srednje vrijednosti niza .....	205
6.2.1. Posljedice dodavanja ili uklanjanja podataka na srednje vrijednosti niza .....	205
6.2.2. Ublažavanje problema utjecaja dodavanja ili uklanjanja podataka na srednje vrijednosti .....	209
Zadaci .....	211
Rješenja .....	211
6.3. Uspoređivanje srodnih skupova podataka .....	212
6.3.1. Grafičko uspoređivanje srodnih skupova podatka .....	212
6.3.2. Uspoređivanje srednjih vrijednosti i mjera raspršenosti srodnih skupova podatka .....	217
Zadaci .....	225
Rješenja .....	226



# GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

## Pojam i definicija granične vrijednosti

*Svojstva graničnih vrijednosti*

*Granična vrijednost kvocijenta polinoma*

*Asimptote krivulje*

3.

### 3. GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

#### 3.1. Pojam i definicija granične vrijednosti

Neka je zadana funkcija  $y(x) = x + 1$ . Razmotrimo što se događa s vrijednostima te funkcije kada se s vrijednostima neovisne varijable  $x$  približavamo broju  $x = 1$  polazeći od broja 0.5 (tablica 1).

$x$	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999
$y(x)$	1,5	1,7	1,8	1,9	1,95	1,99	1,999	1,9999

Tablica 1.

Dakle, kada se približavamo po osi apscisa broju  $x = 1$  s lijeve strane (to jest preko brojeva koji su manji od 1, što pišemo:  $x \rightarrow 1 - 0$  ili  $x \rightarrow 1 -$ ), onda funkcijske vrijednosti teže broju  $y = 2$  preko brojeva koji su manji od 2. Drugim riječima, konvergentnom nizu vrijednosti neovisne varijable na osi apscisa odgovara jedan konvergentan niz vrijednosti ovisne varijable na osi ordinata. Analogno vrijedi i ako se približavamo po osi apscisa broju  $x = 1$  s desne strane (to jest preko brojeva koji su veći od 1, što pišemo:  $x \rightarrow 1 + 0$  ili  $x \rightarrow 1 +$ ), kao što je to vidljivo iz tablice 2.

$x$	1,5	1,3	1,2	1,1	1,05	1,01	1,001	1,0001
$y(x)$	2,5	2,3	2,2	2,1	2,05	2,01	2,001	2,0001

Tablica 2.

Prema tome, bez obzira da li se broju 1 približavamo s lijeva ili s desna po osi apscisa, odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti **približava se** po osi ordinata broju 2. To znači da, ukoliko smo na osi apscisa **dovoljno** blizu broju 1, vrijednosti funkcije su na osi ordinata **po volji blizu** broju 2.

Uočimo da se neovisna varijabla  $x$  mijenja u intervalu oko 1 na način da se pritom vrijednost funkcije (ovisne varijable) sve više približava broju 2 što je  $x$  bliži 1. Dakle, imamo 2 niza realnih brojeva: niz vrijednosti neovisne varijable  $x_1, x_2, \dots$  (riječ je o nizu brojeva na osi apscisa) koji teži broju  $x_0 = 1$  i generiranom nizu vrijednosti ovisne varijable  $y(x_1) \equiv y_1, y(x_2) \equiv y_2, \dots$  (riječ je o nizu brojeva na osi ordinata) koji teži broju  $y_0 = 2$ . Kada  $x$  teži broju  $x_0 = 1$  bilo s lijeva bilo s desna, vrijednost funkcije se približava broju  $y(x_0) \equiv y_0 = 2$ . Pišemo: ako je  $|x - x_0| \rightarrow 0$ , onda  $|y(x) - y(x_0)| \rightarrow 0$  ili, u razmatranom primjeru ako je  $|x - 1| \rightarrow 0$ , onda  $|y(x) - 2| \rightarrow 0$ . Kažemo da je 2 granična vrijednost funkcije  $y(x) = x + 1$  kada  $x \rightarrow 1$ , što možemo zapisati i ovako:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$



Općenito, ako postoji broj  $y_0$  takav da je to granična vrijednost niza funkcijskih vrijednosti kada  $x \rightarrow x_0$ , onda pišemo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0.$$

Ako varijabla  $x$  mijenjajući se u intervalu  $\langle a, b \rangle$  može poprimiti bilo koju vrijednost u tom intervalu približavajući se svojoj granici  $x_0$ , kažemo da je varijabla  $x$  neprekidna varijabla i da se približava granici  $x_0$  na neprekidan način. Ako pri procesu  $x \rightarrow x_0$  i niz funkcijskih vrijednosti teži broju  $y_0$ , kažemo da je  $y_0$  limes ili granična vrijednost funkcije  $y$ .

### Definicija 1.

**Limes** ili **granična vrijednost funkcije  $y$  u točki  $x_0$**  je svaki broj  $y_0$  kojem teži  $y(x)$  kada  $x$  teži prema  $x_0$ . Pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0$$

i čitamo:  $y(x)$  teži broju  $y_0$  kada  $x$  teži prema  $x_0$  ili  $y(x)$  ima limes  $y_0$  kada  $x$  teži prema  $x_0$ .

### Definicija 2.

Ako je  $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0)$ , onda je funkcija  $y$  **neprekidna u točki  $x_0$** .

Funkcija  $y$  ne mora biti definirana u točki  $x_0$  u kojoj tražimo njenu graničnu vrijednost. Dovoljno je da je ona definirana u točkama koje su po volji blizu točki  $x_0$ , to jest za sve točke iz neke njene okoline osim možda u točki  $x_0$ .

## 3.1.1. Svojstva graničnih vrijednosti

Prigodom računanja graničnih vrijednosti koristit ćemo svojstva graničnih vrijednosti, koja samo navodimo.

Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval,  $x_0$  neka točka tog intervala,  $f, g$  realne funkcije definirane na intervalu  $I$  osim eventualno u točki  $x_0$  i neka postoje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Tada i funkcije  $f + g, f - g, kf$  ( $k \in \mathbb{R}$ ),  $fg$  i  $\frac{f}{g}$  imaju graničnu vrijednost u točki  $x_0$ , te vrijedi:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

specijalno,  $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , gdje je  $k$  realna konstanta,

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \text{ uz pretpostavku da je } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Napomenimo da navedena svojstva vrijede i kada  $x \rightarrow -\infty$  ili  $x \rightarrow +\infty$ .

### Primjer 1.

Koristeći se svojstvima granične vrijednosti, pokažimo da je

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 1) = 9.$$

### Rješenje

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (2x) + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1 = 9. \end{aligned}$$

### Primjer 2.

Koristeći se svojstvima granične vrijednosti, pokažimo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-3)(4x+7)}{5-3x} = -\frac{21}{5}.$$

### Rješenje

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-3)(4x+7)}{5-3x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [(2x-3)(4x+7)]}{\lim_{x \rightarrow 0} (5-3x)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2x-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (4x+7)}{\lim_{x \rightarrow 0} (5-3x)} = \frac{(-3) \cdot 7}{5} = -\frac{21}{5}. \end{aligned}$$

### 3.1.2. Granična vrijednost kvocijenta polinoma

Razmotrit ćemo sada čemu je jednaka granična vrijednost kvocijenta polinoma  $m$ -tog i  $n$ -tog stupnja kada neovisna varijabla  $x$  teži u beskonačno. Analizirat ćemo samo slučaj kada  $x \rightarrow \infty$ . Analogno se analizira slučaj kada  $x \rightarrow -\infty$ . Dakle, neka je

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_m \neq 0,$$

polinom  $m$ -tog stupnja, a

$$p_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_n \neq 0,$$

polinom  $n$ -tog stupnja. Trebamo izračunati

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Moguća su tri slučaja: (1)  $m > n$ , (2)  $m = n$  i (3)  $m < n$ . U prvom slučaju ( $m > n$ ) brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom nazivnika (dakle, sa  $x^n$ ), pa dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^{m-n} + a_{m-1} x^{m-n-1} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{ako je } a_m b_n > 0 \\ -\infty & \text{ako je } a_m b_n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Naime, brojnik teži u beskonačno ( $+\infty$  ako su vodeći koeficijenti polinoma  $p_n$  i  $p_m$  istog predznaka, odnosno u  $-\infty$  ako su vodeći koeficijenti polinoma  $p_n$  i  $p_m$  različitog predznaka), a nazivnik realnom broju  $b_n$ , pa i razlomak teži u beskonačno.

**Primjer 3.**

Izračunajmo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 13}{2x - 1}$ .

**Rješenje**

Budući da je stupanj brojnika (striktno) veći od stupnja nazivnika, dijelimo i brojnik i nazivnik vodećom potencijom nazivnika, što naznačavamo s  $/:x$ . Dakle, dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 13}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 13}{2x - 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 + \frac{13}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \infty,$$

odnosno navedeni kvocijent polinoma divergira kada  $x$  teži u beskonačno.

I u drugom slučaju ( $m = n$ ) brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom nazivnika, odnosno brojnika (dakle, s  $x^n$ ). No, sada dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_n(x)}{p_n(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n}. \end{aligned}$$

Primjer 4.

Izračunajmo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 13}{2x^3 + 2x^2 - 1}$ .

Rješenje

Budući da je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika, dijelimo i brojnik i nazivnik vodećom potencijom nazivnika (ili brojnika, što je u ovom slučaju identično).

Dakle, dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 13}{2x^3 + 2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 13}{2x^3 + 2x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}.$$

Ako je  $m < n$ , brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom brojnika:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n x^{n-m} + b_{n-1} x^{n-m-1} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = 0, \end{aligned}$$

jer brojnik teži realnom broju  $a_m$ , a nazivnik u beskonačno. Ako brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom nazivnika, onda će brojnik težiti nuli, a nazivnik broju  $b_n$ , pa je naravno ponovo granična vrijednost kvocijenta jednaka 0.

**Primjer 5.**

Izračunajmo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4x + 13}{2x^4 - 2x^3 + 7x}$ .

**Rješenje**

Budući da je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, dijelimo i brojnik i nazivnik vodećom potencijom brojnika, pa dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4x + 13}{2x^4 - 2x^3 + 7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4x + 13 / : x^3}{2x^4 - 2x^3 + 7x / : x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{4}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2x - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}} = 0.$$

Da smo brojnik i nazivnik dijelili vodećom potencijom nazivnika, imali bismo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4x + 13}{2x^4 - 2x^3 + 7x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4x + 13 / : x^4}{2x^4 - 2x^3 + 7x / : x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} + \frac{13}{x^4}}{2 - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Sada ćemo analizirati graničnu vrijednost kvocijenta polinoma  $m$ -tog i  $n$ -tog stupnja kada neovisna varijabla  $x$  teži realnom broju  $a$ . Dakle, računamo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p_m(x)}{p_n(x)}.$$

Neka je  $p_m(a) = A$ , a  $p_n(a) = B \neq 0$ . Tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}.$$

Ako je  $p_m(a) = p_n(a) = 0$ , onda to znači da je  $x = a$  nul-točka oba razmatrana polinoma, što, prema osnovnom teoremu algebre, znači da se ti polinomi mogu pisati kao umnožak dva faktora pri čemu je jedan faktor  $x - a$ , to jest

$$p_m(x) = (x - a) p_{m-1}(x),$$

a

$$p_n(a) = (x - a) p_{n-1}(x),$$

pa imamo da je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) p_{m-1}(x)}{(x - a) p_{n-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p_{m-1}(x)}{p_{n-1}(x)}.$$

Uočimo da smo problem računanja granične vrijednosti kvocijenta polinoma  $m$ -tog i  $n$ -tog stupnja, kada neovisna varijabla  $x$  teži realnom broju  $a$ , zamijenili problemom računanja granične vrijednosti kvocijenta polinoma  $(m - 1)$ -vog i  $(n - 1)$ -vog stupnja, kada neovisna varijabla  $x$  teži danom realnom broju  $a$ . Ovaj problem računamo na jedan od prethodno izloženih načina, ovisno o tipu problem koji smo dobili. Pojasnimo to na sljedećim primjerima.

**Primjer 6.**

Izračunajmo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ .

**Rješenje**

Vrijednost i brojnika i nazivnika funkcije čiju graničnu vrijednost želimo izračunati jednaka je 0 kada  $x \rightarrow 1$ . To znači da je  $x = 1$  nul-točka i brojnika i nazivnika. Dosta, kao što znamo

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), \text{ a } x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

pa je

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}.$$

**Primjer 7.**

Izračunajmo  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ .

**Rješenje**

Vrijednost i brojnika i nazivnika funkcije čiju graničnu vrijednost želimo izračunati jednaka je 0 kada  $x \rightarrow 2$ , pa je  $x = 2$  nul-točka i brojnika i nazivnika. Nadalje, lako se provjeri da je

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3), \text{ a } x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1),$$

pa je

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-1} = \frac{2+3}{2-1} = 5.$$

Bez dokaza navodimo dva veoma važna limesa koje ćemo u nastavku koristiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ili, općenitije,

$$\lim_{A(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{A(x)}\right)^{A(x)} = e \quad \text{i} \quad \lim_{A(x) \rightarrow 0} \frac{\sin A(x)}{A(x)} = 1.$$

## Riješeni zadatci za vježbu

1. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x^4 + 1}} = (\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = 2, \text{ jer kada } x \rightarrow -\infty,$$

onda  $\frac{1}{x^k} = x^{-k} \rightarrow 0$  za sve  $k \in \mathbb{N}$ , pa i za, posebno,  $k \in \{1, 2, 4\}$ .

2. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3 (x^2+x+1)^2}{x^7 - 50x + 5}$ .

I u brojniku i u nazivniku imamo polinom sedmog stupnja, pa stoga trebamo dijeliti i brojnik i nazivnik s  $x^7$ . Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3 (x^2+x+1)^2}{x^7 - 50x + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+2)^3}{x^3} \cdot \frac{(x^2+x+1)^2}{x^4}}{1 - \frac{50}{x^6} + \frac{5}{x^7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2}{1 - \frac{50}{x^6} + \frac{5}{x^7}} = 1. \end{aligned}$$

3. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

4. Pokažite da je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3 - 2x + 2} = \frac{1}{2}$ .

5. Pokažite da je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x - 777} = \infty$ .

6. Izračunajte:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ .

Podijelimo li i brojnik i nazivnik s  $\sqrt{x}$ , imamo



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} = 1.$$

7. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ .

$x = 1$  je nul-točka i brojnika i nazivnika, što znači da se i brojnik i nazivnik mogu prikazati kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan  $x - 1$ . Prema tome, imamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

8. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$ .

$x = 3$  je nul-točka i brojnika i nazivnika, što znači da se i brojnik i nazivnik mogu prikazati kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan  $x - 3$ . Dakle, imamo

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}.$$

9. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ .

Vrijednost i brojnika i nazivnika za  $x = 1$  jednaka je 0, to je  $x = 1$  nul-točka i brojnika i nazivnika, pa se oni mogu pisati kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan  $x - 1$ . Lako se vidi (na primjer, koristeći se formulom za zbroj prvih  $n$  članova geometrijskog niza čiji je prvi član 1, a kvocijent  $x$ ) da je

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

odnosno

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}).$$

Analogno je

$$x^m - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}).$$

Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})}{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}} = \frac{n}{m}.$$

10. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ .

Ponovo je u pitanju neodređeni izraz oblika  $\frac{0}{0}$ , to jest brojnik i nazivnik istodobno teže prema 0, kada  $x \rightarrow -1$ . Najprije ćemo se “riješiti” korijena koristeći se supstitucijom  $x = t^k$ , pri čemu je  $k$  najmanji zajednički višekratnik korijena. Dakle, u ovom slučaju je  $k = \nu(3, 5) = 15$ , to jest koristimo se supstitucijom

$$x = t^{15}.$$

Nakon supstitucije treba “staru” varijablu ( $x$ ) zamijeniti “novom” varijablom ( $t$ ). Zato valja ispitati kamo teži  $t$  kada  $x \rightarrow -1$ . Zbog,  $t = \sqrt[15]{x}$ , očito će  $t \rightarrow \sqrt[15]{-1} = -1$ . Dakle, kada  $x \rightarrow -1$ , onda i  $t \rightarrow -1$ , pa je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1 + t^3}{1 + t^5} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{(1+t)(1-t+t^2-t^3+t^4)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1-t+t^2}{1-t+t^2-t^3+t^4} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

11. Izračunajmo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ .

Uvedemo li supstituciju  $x+1 = t^6$ , to jest  $t = \sqrt[6]{x+1}$ , onda kada  $x \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 1$ , pa je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

12. Pokažimo da je  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{4}{3}$ .

**Napomena 2.**

Koristimo se supstitucijom  $x = t^{12}$ .

### 3.1.3. Asimptote krivulje

Neka je funkcija  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  realna funkcija jedne relane varijable. Pri grafičkom prikazu funkcije  $f$  korisno je poznavanje **asimptota**. Asimptote mogu biti **vertikalne** (ili **okomite**), **horizontalne** (ili **vodoravne**) i **kose**.

#### Definicija 3.

Pravac je **asimptota krivulje** ako ima svojstvo da udaljenost točke na krivulji od tog pravca teži nuli, kada točka gibajući se po krivulji teži u beskonačnost (to jest kada njena udaljenost od ishodišta neograničeno raste).

**Vertikalna asimptota** krivulje je pravac  $x = x_0$  za kojeg vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

#### Primjer 8.

Ispitajmo ima li funkcija  $y(x) = \frac{x-1}{x+1}$  vertikalne asimptote.

#### Rješenje

Najprije uočimo da funkcija može imati vertikalnu asimptotu *samo u točkama prekida*. Budući da te točke *ne pripadaju* području definicije funkcije, a u ovom primjeru jedino je  $x_0 = -1$  točka prekida, to je jedino pravac  $x = -1$  kandidat za vertikalnu asimptotu. Doista, kako je

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x-1}{x+1} = -\infty,$$

to je pravac  $x = -1$  vertikalna asimptota (slika 1). Zašto je  $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ ? Ako  $x \rightarrow -1$  s lijeva (dakle, preko brojeva koji su *manji* od  $-1$ ), onda je za sve takve  $x$  nazivnik negativan. I brojnik je također negativan, pa je razlomak (kao kvocijent dva negativna broja) pozitivan. Analogno, ako  $x \rightarrow -1$  s desna (dakle, preko brojeva koji su *veći* od  $-1$ ), onda je za sve takve  $x$  nazivnik pozitivan. No, brojnik je negativan, pa je razlomak (kao kvocijent dva broja različitog predznaka) negativan.

**Horizontalna asimptota** krivulje je pravac  $y = y_0$  koji ima svojstvo

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ ili } y_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

## Primjer 9.

Ispitajmo ima li graf funkcije  $y(x) = \frac{x-1}{x+1}$  horizontalnu asimptotu.

## Rješenje

Budući da je

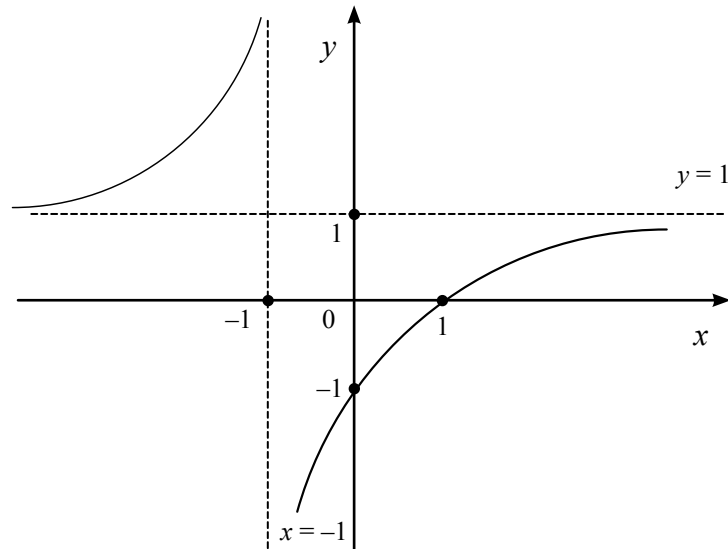
$$y_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1,$$

to se graf funkcije  $y(x) = \frac{x-1}{x+1}$  asimptotski približava pravcu  $y = 1$  (koji mu je horizontalna asimptota) kada  $x \rightarrow -\infty$ .

Analogno,

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1,$$

to se graf funkcije  $y(x) = \frac{x-1}{x+1}$  asimptotski približava pravcu  $y = 1$  (koji mu je horizontalna asimptota) kada  $x \rightarrow +\infty$ .



Slika 1.

Dakle, pravac  $y = 1$  je horizontalna asimptota (slika 1).

**Kosa asimptota** krivulje je pravac  $y = k_1x + l_1$ , gdje je

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

dok se pomoću te vrijednosti ako je  $k_1 \neq 0$ , određuje odsječak na osi ordinata  $l_1$ , kao granična vrijednost

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - k_1x].$$

Naravno, pravac  $y = k_2x + l_2$  je također kosa asimptota ako postoji

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

dok se pomoću te vrijednosti ako je  $k_2 \neq 0$ , određuje odsječak na osi ordinata  $l_2$ , kao granična vrijednost

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2x].$$

Ako je  $k_1 = 0$  kada  $x \rightarrow +\infty$ , onda je os apscisa (to jest pravac  $y = 0$ ) horizontalna asimptota. Analogno, Ako je  $k_2 = 0$  kada  $x \rightarrow -\infty$ , onda je os apscisa (to jest pravac  $y = 0$ ) horizontalna asimptota.

**Primjer 10.**

Ispitajmo ima li kosu asimptotu graf funkcije  $y(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ .

**Rješenje**

Uočimo da je:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3}{x^2 + 1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1,$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^3}{x^2 + 1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1,$$

pa je pravac  $y = x - 1$  kosa asimptota grafa funkcije  $y$  i kada  $x \rightarrow +\infty$  i kada  $x \rightarrow -\infty$ .

## Zadatci

1. Odredite (ako postoje) vertikalne asimptote grafa funkcije  $y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ .
2. Odredite (ako postoje) horizontalne asimptote grafa funkcije  $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
3. Odredite (ako postoje) vertikalne, horizontalne i kose asimptote grafa sljedećih funkcija:
  - a)  $y(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ;
  - b)  $y(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ ;
  - c)  $y(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x}$ .

## Rješenja

1.  $x = -1, x = 1$ .
2.  $y = 1$ .
3. a) Nema vertikalnih asimptota. Horizontalna je  $y = 0$ . Nema kosih asimptota.  
b) Vertikalne asimptote:  $x = -2, x = 2$ . Nema horizontalnih asimptota. Kosa asimptota:  $y = x$ .  
c) Vertikalna asimptota:  $x = 0$ . Nema horizontalnih asimptota. Kosa asimptota:  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .