Đurđica Salamon Padjen • Boško Šego • Tihana Škrinjarić

MATEMATIKA 4

udžbenik sa zbirkom zadataka
za ekonomiste i komercijaliste
IV. razred

prvo izdanje
Zagreb, 2014.

alka script

SADRŽAJ

GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

Pojam i definicija granične vrijednosti

Svojstva graničnih vrijednosti

Granična vrijednost kvocijenta polinoma

Asimptote krivulje

3.

3. GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

3.1. Pojam i definicija granične vrijednosti

Neka je zadana funkcija $y(x) = x + 1$. Razmotrimo što se događa s vrijednostima te funkcije kada se s vrijednostima neovisne varijable x približavamo broju $x = 1$ polazeći od broja 0.5 (tablica 1).

x	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999
$y(x)$	1,5	1,7	1,8	1,9	1,95	1,99	1,999	1,9999

Tablica 1.

Dakle, kada se približavamo po osi apscisa broju $x = 1$ s lijeve strane (to jest preko brojeva koji su manji od 1, što pišemo: $x \to 1 - 0$ ili $x \to 1 -$), onda funkcijske vrijednosti teže broju $y = 2$ preko brojeva koji su manji od 2. Drugim riječima, konvergentnom nizu vrijednosti neovisne varijable na osi apscisa odgovara jedan konvergentan niz vrijednosti ovisne varijable na osi ordinata. Analogno vrijedi i ako se približavamo po osi apscisa broju $x = 1$ s desne strane (to jest preko brojeva koji su veći od 1, što pišemo: $x \to 1 + 0$ ili $x \to 1 +$), kao što je to vidljivo iz tablice 2.

x	1,5	1,3	1,2	1,1	1,05	1,01	1,001	1,0001
$y(x)$	2,5	2,3	2,2	2,1	2,05	2,01	2,001	2,0001

Tablica 2.

Prema tome, bez obzira da li se broju 1 približavamo s lijeva ili s desna po osi apscisa, odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti **približava se** po osi ordinata broju 4. To znači da, ukoliko smo na osi apscisa **dovoljno** blizu broju 1, vrijednosti funkcije su na osi ordinata **po volji blizu** broju 2.

Uočimo da se neovisna varijabla x mijenja u intervalu oko 1 na način da se pritom vrijednost funkcije (ovisne varijable) sve više približava broju 2 što je x bliži 1. Dakle, imamo 2 niza realnih brojeva: niz vrijednosti neovisne varijable $x_1, x_2, \ldots$ (riječ je o nizu brojeva na osi apscisa) koji teži broju $x_0 = 1$ i generiranom nizu vrijednosti ovisne varijable $y(x_1) \equiv y_1, y(x_2) \equiv y_2, \ldots$ (riječ je o nizu brojeva na osi ordinata) koji teži broju $y_0 = 2$. Kada x teži broju $x_0 = 1$ bilo s lijeva bilo s desna, vrijednost funkcije se približava broju $y(x_0) \equiv y_0 = 2$. Pišemo: ako je $|x - x_0| \to 0$, onda $|y(x) - y(x_0)| \to 0$ ili, u razmatranom primjeru ako je $|x - 1| \to 0$, onda $|y(x) - 2| \to 0$. Kažemo da je 2 granična vrijednost funkcije $y(x) = x + 1$ kada $x \to 1$, što možemo zapisati i ovako:

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \lim_{x \to 1} y(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2.$$

Općenito, ako postoji broj y_0 takav da je to granična vrijednost niza funkcijskih vrijednosti kada $x \to x_0$, onda pišemo

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0.$$

Ako varijabla x mijenjajući se u intervalu $\langle a, b \rangle$ može poprimiti bilo koju vrijednost u tom intervalu približavajući se svojoj granici x_0, kažemo da je varijabla x neprekidna varijabla i da se približava granici x_0 na neprekidan način. Ako pri procesu $x \to x_0$ i niz funkcijskih vrijednosti teži broju y_0, kažemo da je y_0 limes ili granična vrijednost funkcije y.

Definicija 1.

Limes ili **granična vrijednost funkcije *y* u točki x_0** je svaki broj y_0 kojem teži $y(x)$ kada x teži prema x_0. Pišemo:

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$$

i čitamo: $y(x)$ teži broju y_0 kada x teži prema x_0 ili $y(x)$ ima limes y_0 kada x teži prema x_0.

Definicija 2.

Ako je $\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0)$, onda je funkcija y **neprekidna u točki x_0**.

Funkcija y ne mora biti definirana u točki x_0 u kojoj tražimo njenu graničnu vrijednost. Dovoljno je da je ona definirana u točkama koje su po volji blizu točki x_0, to jest za sve točke iz neke njene okoline osim možda u točki x_0.

3.1.1. Svojstva graničnih vrijednosti

Prigodom računanja graničnih vrijednosti koristit ćemo svojstva graničnih vrijednosti, koja samo navodimo.

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, x_0 neka točka tog intervala, f, g realne funkcije definirane na intervalu I osim eventualno u točki x_0 i neka postoje

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ i } \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Tada i funkcije $f+g$, $f-g$, kf $(k \in \mathbb{R})$, fg i $\frac{f}{g}$ imaju graničnu vrijednost u točki x_0, te vrijedi:

(1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$,

(2) $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)$,

(3) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$,

specijalno, $\lim_{x\to x_0}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)$, gdje je k realna konstanta,

(4) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$ uz pretpostavku da je $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

Napomenimo da navedena svojstva vrijede i kada $x\to-\infty$ ili $x\to+\infty$.

Primjer 1.

Koristeći se svojstvima granične vrijednosti, pokažimo da je

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-2x+1)=9.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-2x+1)=\lim_{x\to 2}(3x^2)-\lim_{x\to 2}(2x)+\lim_{x\to 2}1=$$

$$=3\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x+1=3\cdot 4-2\cdot 2+1=9.$$

Primjer 2.

Koristeći se svojstvima granične vrijednosti, pokažimo da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x-3)(4x+7)}{5-3x}=-\frac{21}{5}.$$

Rješenje

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x-3)(4x+7)}{5-3x}=\frac{\lim_{x\to 0}[(2x-3)(4x+7)]}{\lim_{x\to 0}(5-3x)}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}(2x-3)\cdot\lim_{x\to 0}(4x+7)}{\lim_{x\to 0}(5-3x)}==\frac{(-3)\cdot 7}{5}=-\frac{21}{5}.$$

3.1.2. Granična vrijednost kvocijenta polinoma

Razmotrit ćemo sada čemu je jednaka granična vrijednost kvocijenta polinoma m-tog i n-tog stupnja kada neovisna varijabla x teži u beskonačno. Analizirat ćemo samo slučaj kada $x \to \infty$. Analogno se analizira slučaj kada $x \to -\infty$. Dakle, neka je

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,,\ a_m \neq 0,$$

polinom m-tog stupnja, a

$$p_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + \mathrm{b}_0\,,\ b_n \neq 0,$$

polinom n-tog stupnja. Trebamo izračunati

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Moguća su tri slučaja: (1) $m > n$, (2) $m = n$ i (3) $m < n$. U prvom slučaju ($m > n$) brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom nazivnika (dakle, sa x^n), pa dobivamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^{m-n} + a_{m-1}x^{m-n-1} + \ldots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_n + \dfrac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \dfrac{b_1}{x^{n-1}}x + \dfrac{b_0}{x^n}} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{ako je } a_m b_n > 0 \\ -\infty & \text{ako je } a_m b_n < 0 \end{cases}.$$

Naime, brojnik teži u beskonačno ($+\infty$ ako su vodeći koeficijenti polinoma p_n i p_m istog predznaka, odnosno u $-\infty$ ako su vodeći koeficijenti polinoma p_n i p_m različitog predznaka), a nazivnik realnom broju b_n, pa i razlomak teži u beskonačno.

Primjer 3.

Izračunajmo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 13}{2x - 1}$.

Rješenje

Budući da je stupanj brojnika (striktno) veći od stupnja nazivnika, dijelimo i brojnik i nazivnik vodećom potencijom nazivnika, što naznačavamo s /:x. Dakle, dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+13}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+13}{2x-1}\frac{/:x}{/:x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2+\frac{13}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\infty,$$

odnosno navedeni kvocijent polinoma divergira kada x teži u beskonačno.

I u drugom slučaju ($m = n$) brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom nazivnika, odnosno brojnika (dakle, s x^n). No, sada dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p_n(x)}{p_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{b_n+\frac{b_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{n-1}}x+\frac{b_0}{x^n}}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Primjer 4.

Izračunajmo $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+13}{2x^3+2x^2-1}$.

Rješenje

Budući da je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika, dijelimo i brojnik i nazivnik vodećom potencijom nazivnika (ili brojnika, što je u ovom slučaju identično). Dakle, dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+13}{2x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+13}{2x^3+2x^2-1}\frac{/:x^3}{/:x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{13}{x^3}}{2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}\ .$$

Ako je $m < n$, brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom brojnika:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m+\frac{a_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_nx^{n-m}+b_{n-1}x^{n-m-1}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}x+\frac{b_0}{x^m}}=0,$$

jer brojnik teži realnom broju a_m, a nazivnik u beskonačno. Ako brojnik i nazivnik dijelimo s vodećom potencijom nazivnika, onda će brojnik težiti nuli, a nazivnik broju b_n, pa je naravno ponovo granična vrijednost kvocijenta jednaka 0.

Primjer 5.

Izračunajmo $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+4x+13}{2x^4-2x^3+7x}$.

Rješenje

Budući da je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, dijelimo i brojnik i nazivnik vodećom potencijom brojnika, pa dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+4x+13}{2x^4-2x^2+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+4x+13}{2x^4-2x^2+7x}\,\frac{/:x^3}{/:x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{x^2}+\frac{13}{x^3}}{2x-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}}=0\ .$$

Da smo brojnik i nazivnik dijelili vodećom potencijom nazivnika, imali bismo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+4x+13}{2x^4-2x^2+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+4x+13}{2x^4-2x^2+7x}\,\frac{/:x^4}{/:x^4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}+\frac{13}{x^4}}{2-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^4}}=\frac{0}{2}=0.$$

Sada ćemo analizirati graničnu vrijednost kvocijenta polinoma m-tog i n-tog stupnja kada neovisna varijabla x teži realnom broju a. Dakle, računamo

$$\lim_{x\to a}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}.$$

Neka je $p_m(a) = A$, a $p_n(a) = B \neq 0$. Tada je

$$\lim_{x\to a}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}=\frac{A}{B}\in\mathbb{R}.$$

Ako je $p_m(a) = p_n(a) = 0$, onda to znači da je $x = a$ nul-točka oba razmatrana polinoma, što, prema osnovnom teoremu algebre, znači da se ti polinomi mogu pisati kao umnožak dva faktora pri čemu je jedan faktor $x - a$, to jest

$$p_m(a) = (x-a)\,p_{m-1}(x)\ ,$$

a

$$p_n(a) = (x - a)\, p_{n-1}\,(x)\,,$$

pa imamo da je

$$\lim_{x\to a}\frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\,p_{m-1}(x)}{(x-a)\,p_{n-1}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{p_{m-1}(x)}{p_{n-1}(x)}\,.$$

Uočimo da smo problem računanja granične vrijednosti kvocijenta polinoma m-tog i n-tog stupnja, kada neovisna varijabla x teži realnom broju a, zamijenili problemom računanja granične vrijednosti kvocijenta polinoma $(m-1)$-vog i $(n-1)$-vog stupnja, kada neovisna varijabla x teži danom realnom broju a. Ovaj problem računamo na jedan od prethodno izloženih načina, ovisno o tipu problem koji smo dobili. Pojasnimo to na sljedećim primjerima.

Primjer 6.

Izračunajmo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Rješenje

Vrijednost i brojnika i nazivnika funkcije čiju graničnu vrijednost želimo izračunati jednaka je 0 kada $x \to 1$. To znači da je $x = 1$ nul-točka i brojnika i nazivnika. Dosta, kao što znamo

$$x^3 - 1 = (x-1)\,(x^2 + x + 1)\,,\ \text{a}\ x^2 - 1 = (x-1)\,(x+1),$$

pa je

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Primjer 7.

Izračunajmo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

Rješenje

Vrijednost i brojnika i nazivnika funkcije čiju graničnu vrijednost želimo izračunati jednaka je 0 kada $x \to 2$, pa je $x = 2$ nul-točka i brojnika i nazivnika. Nadalje, lako se provjeri da je

$$x^2 + x - 6 = (x-2)\,(x+3)\,,\ \text{a}\ x^2 - 3x + 2 = (x-2)\,(x-1)\,,$$

pa je

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1}=\frac{2+3}{2-1}=5.$$

Bez dokaza navodimo dva veoma važna limesa koje ćemo u nastavku koristiti:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ i } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ili, općenitije,

$$\lim_{A(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{A(x)}\right)^{A(x)}=e \text{ i } \lim_{A(x)\to 0}\frac{\sin A(x)}{A(x)}=1.$$

Riješeni zadatci za vježbu

1. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}=(\text{dijelimo brojnik i nazivnik s } x^2)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=2, \text{ jer kada } x\to-\infty,$$

onda $\dfrac{1}{x^k}=x^{-k}\to 0$ za sve $k\in\mathbb{N}$, pa i za, posebno, $k\in\{1,2,4\}$.

2. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7-50x+5}$.

I u brojniku i u nazivniku imamo polinom sedmog stupnja, pa stoga trebamo dijeliti i brojnik i nazivnik s x^7. Dakle, imamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7-50x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+2)^3}{x^3}\cdot\frac{(x^2+x+1)^2}{x^4}}{1-\frac{50}{x^6}+\frac{5}{x^7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^3\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2}{1-\frac{50}{x^6}+\frac{5}{x^7}}=1.$$

3. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3+2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}=\sqrt[3]{1}=1.$$

4. Pokažite da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3-2x+2}=\dfrac{1}{2}$.

5. Pokažite da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x-777}=\infty$.

6. Izračunajte: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Podijelimo li i brojnik i nazivnik s $\sqrt{x}$, imamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=1.$$

7. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$.

   $x = 1$ je nul-točka i brojnika i nazivnika, što znači da se i brojnik i nazivnik mogu prikazati kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan $x - 1$. Prema tome, imamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

8. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

   $x = 3$ je nul-točka i brojnika i nazivnika, što znači da se i brojnik i nazivnik mogu prikazati kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan $x - 3$. Dakle, imamo

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2}.$$

9. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$.

   Vrijednost i brojnika i nazivnika za $x = 1$ jednaka je 0, to je $x = 1$ nul-točka i brojnika i nazivnika, pa se oni mogu pisati kao umnožak dvaju faktora od kojih je jedan $x - 1$. Lako se vidi (na primjer, koristeći se formulom za zbroj prvih n članova geometrijskog niza čiji je prvi član 1, a kvocijent x) da je

$$1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1},$$

   odnosno

$$x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+...+x^{n-1}).$$

   Analogno je

$$x^m-1=(x-1)(1+x+x^2+...+x^{m-1}).$$

   Dakle,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+x+x^2+...+x^{n-1})}{(x-1)(1+x+x^2+...+x^{m-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+...+x^{n-1}}{1+x+x^2+...+x^{m-1}}=\frac{n}{m}.$$

10. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Ponovo je u pitanju neodređeni izraz oblika $\dfrac{0}{0}$, to jest brojnik i nazivnik istodobno teže prema 0, kada $x \to -1$. Najprije ćemo se "riješiti" korijena koristeći se supstitucijom $x = t^k$, pri čemu je k najmanji zajednički višekratnik korijena. Dakle, u ovom slučaju je $k = v(3, 5) = 15$, to jest koristimo se supstitucijom

$$x = t^{15}.$$

Nakon supstitucije treba "staru" varijablu (x) zamijeniti "novom" varijablom (t). Zato valja ispitati kamo teži t kada $x \to -1$. Zbog, $t = \sqrt[15]{x}$, očito će $t \to \sqrt[15]{-1} = -1$. Dakle, kada $x \to -1$, onda i $t \to -1$, pa je

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to -1} \frac{1+t^3}{1+t^5} = \lim_{t\to -1} \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{(1+t)(1-t+t^2-t^3+t^4)} =$$

$$= \lim_{t\to -1} \frac{1-t+t^2}{1-t+t^2-t^3+t^4} = \frac{3}{5}.$$

11. Izračunajmo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

Uvedemo li supstituciju $x + 1 = t^6$, to jest $t = \sqrt[6]{x+1}$, onda kada $x \to 0$, $t \to 1$, pa je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

12. Pokažimo da je $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \dfrac{4}{3}$.

Napomena 2.

Koristimo se supstitucijom $x = t^{12}$.

3.1.3. Asimptote krivulje

Neka je funkcija $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ realna funkcija jedne relane varijable. Pri grafičkom prikazu funkcije f korisno je poznavanje **asimptota**. Asimptote mogu biti **vertikalne** (ili **okomite**), **horizontalne** (ili **vodoravne**) i **kose**.

Definicija 3.

Pravac je **asimptota krivulje** ako ima svojstvo da udaljenost točke na krivulji od tog pravca teži nuli, kada točka gibajući se po krivulji teži u beskonačnost (to jest kada njena udaljenost od ishodišta neograničeno raste).

Vertikalna asimptota krivulje je pravac $x = x_0$ za kojeg vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Primjer 8.

Ispitajmo ima li funkcija $y(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ vertikalne asimptote.

Rješenje

Najprije uočimo da funkcija može imati vertikalnu asimptotu *samo u točkama prekida*. Budući da te točke *ne pripadaju* području definicije funkcije, a u ovom primjeru jedino je $x_0 = -1$ točka prekida, to je jedino pravac $x = -1$ kandidat za vertikalnu asimptotu. Doista, kako je

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x-1}{x+1} = -\infty,$$

to je pravac $x = -1$ vertikalna asimptota (slika 1). Zašto je $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$? Ako $x \to -1$ s lijeva (dakle, preko brojeva koji su *manji* od -1), onda je za sve takve x nazivnik negativan. I brojnik je također negativan, pa je razlomak (kao kvocijent dva negativna broja) pozitivan. Analogno, ako $x \to -1$ s desna (dakle, preko brojeva koji su *veći* od -1), onda je za sve takve x nazivnik pozitivan. No, brojnik je negativan, pa je razlomak (kao kvocijent dva broja različitog predznaka) negativan.

Horizontalna asimptota krivulje je pravac $y = y_0$ koji ima svojstvo

$$y_0 = \lim_{x\to -\infty} f(x) \quad \text{ili} \quad y_0 = \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Primjer 9.

Ispitajmo ima li graf funkcije $y(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ horizontalnu asimptotu.

Rješenje

Budući da je

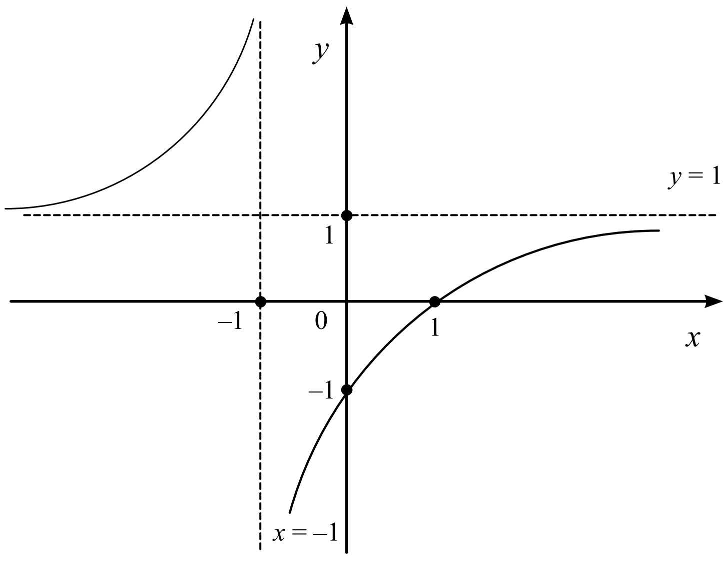
$$y_0=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

to se graf funkcije $y(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ asimptotski približava pravcu $y = 1$ (koji mu je horizontalna asimptota) kada $x \to -\infty$.

Analogno,

$$y_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

to se graf funkcije $y(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ asimptotski približava pravcu $y = 1$ (koji mu je horizontalna asimptota) kada $x \to +\infty$.



Slika 1.

Dakle, pravac $y = 1$ je horizontalna asimptota (slika 1).

Kosa asimptota krivulje je pravac $y = k_1 x + l_1$, gdje je

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$

dok se pomoću te vrijednosti ako je $k_1 \neq 0$, određuje odsječak na osi ordinata l_1, kao granična vrijednost

$$l_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k_1 x].$$

Naravno, pravac $y = k_2 x + l_2$ je također kosa asimptota ako postoji

$$k_2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

dok se pomoću te vrijednosti ako je $k_2 \neq 0$, određuje odsječak na osi ordinata l_2, kao granična vrijednost

$$l_2 = \lim_{x\to -\infty} [f(x) - k_2 x].$$

Ako je $k_1 = 0$ kada $x \to +\infty$, onda je os apscisa (to jest pravac $y = 0$) horizontalna asimptota. Analogno, Ako je $k_2 = 0$ kada $x \to -\infty$, onda je os apscisa (to jest pravac $y = 0$) horizontalna asimptota.

Primjer 10.

Ispitajmo ima li kosu asimptotu graf funkcije $y(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Rješenje

Uočimo da je:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$l_1 = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = -1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3+x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2+1} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = -1,$$

pa je pravac $y = x - 1$ kosa asimptota grafa funkcije y i kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$.

Zadatci

1. Odredite (ako postoje) vertikalne asimptote grafa funkcije $y(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.
2. Odredite (ako postoje) horizontalne asimptote grafa funkcije $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
3. Odredite (ako postoje) vertikalne, horizontalne i kose asimptote grafa sljedećih funkcija:

   a) $y(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; b) $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; c) $y(x)=\dfrac{x^2+2x}{2x}$.

Rješenja

1. $x=-1$, $x=1$.
2. $y=1$.
3. a) Nema vertikalnih asimptota. Horizontalna je $y=0$. Nema kosih asimptota.

   b) Vertikalne asymptote: $x=-2$, $x=2$. Nema horizontalnih asimptota. Kosa asimptota: $y=x$.

   c) Vertikalna asimptota: $x=0$. Nema horizontalnih asimptota. Kosa asimptota: $y=\dfrac{1}{2}x+1$.